Beiträge zur logischen Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
genehmigt von der Philosophischen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

von

Carl Gustav Hempel
aus Berlin-Buch

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Februar 1934
Tag der Promotion: 27. Juli 1934

Jena 1934
Universitäts-Buchdruckerei G. Neuenhahn, G. m. b. H., Jena

443

Referenten: Professor Dr. Wolfgang Köhler
Geh. Rat Professor Dr. Nicolai Hartmann

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Die vorliegende Schrift stellt einen von der Philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin genehmigten Teildruck der Inaugural-Dissertation des Verfassers dar.

Meinen Eltern
in herzlicher Dankbarkeit

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550810_0168

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Kapitel I. Problemstellung 11

Kapitel II. Logische Analyse einiger neuerer Ausgestaltungen der empiristisch-statistischen Theorie der Wahrscheinlichkeit 15

§ 1. Der Grundgedanke der statistischen Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs und seine logische Problematik 15

§ 2. Der logische Charakter der Wahrscheinlichkeitstheorie von R. v. Mises 20

Anhang: Über die Wahrscheinlichkeit von Einzelfällen . . 30

§ 3. Bemerkungen zu H. Reichenbachs axiomatischer Theorie der Wahrscheinlichkeit. 34

Kapitel III. Beiträge zu einer „finitistischen" Auflösung der logischen Schwierigkeiten der statistischen Wahrscheinlichkeitstheorie 42

§ 1. Zur physikalischen Deutung der Wahrscheinlichkeitsaussagen 42

§ 2. Über den Gehalt der Wahrscheinlichkeitsaussagen der empirischen Wissenschaft 64

Literaturverzeichnis 69

Vorwort.

In der vorliegenden Schrift sind einige Kapitel einer umfangreicheren Arbeit gleichen Titels zusammengefaßt, die im Sommer 1933 der Philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin eingereicht und von ihr als Inaugural-Dissertation genehmigt wurde.

Im folgenden soll der Gedankengang der Dissertation unter besonderer Berücksichtigung der hier nicht abgedruckten Teile in seinen Grundzügen dargestellt werden.

Das Grundproblem der Arbeit ist die Frage nach der logischen Form und nach dem Gehalt der Wahrscheinlichkeitsaussagen in der empirischen Wissenschaft. Die Untersuchung dieser gegenwärtig noch nicht abschließend geklärten Frage geht aus von einer logischen Analyse der wichtigsten in neuerer Zeit vertretenen Theorien der Wahrscheinlichkeit. Diese werden in zwei große Gruppen eingeteilt: in die der empiristischen und die der aprioristischen Deutungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs und der Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Die empiristischen Theorien bringen auf Grund sorgfältiger Analysen der in der empirischen Wissenschaft, besonders in der Naturwissenschaft, aufgestellten Wahrscheinlichkeitsaussagen den Wahrscheinlichkeitsbegriff in engsten Zusammenhang mit dem Begriff der relativen Häufigkeit. Die erste konsequente Durchführung dieser „statistischen" Deutung der Wahrscheinlichkeit ist von R. v. Mises gegeben worden; in der Dissertation wie in der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß diese sonst so überaus befriedigende Theorie einem schwerwiegenden Einwande ausgesetzt ist, der zuerst wohl von H. Reichenbach und H. Feigl ausdrücklich geltend gemacht wurde, und der hier in einer verschärften Form entwickelt wird. Er besagt im wesentlichen, daß im Rahmen der v. Misesschen Theorie die den Wahrscheinlichkeitsbegriff auf den transfiniten Begriff des Limes einer unendlichen Folge von relativen Häufigkeiten stützt, jede Wahrscheinlichkeitsaussage sinnleer werde, da sie grundsätzlich keiner empirischen — und damit notwendig finiten — Nachprüfung zugänglich sei.

Die Grundbehauptung der aprioristischen Theorien der Wahrscheinlichkeit besagt im wesentlichen, Wahrscheinlichkeitsaussagen beruhten auf Urteilen apriori über physikalische oder logische Spielraumverhältnisse. Dieser Gedanke, der an die auf Laplace zurückgehende Grundlegung der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung anknüpft, hat sehr verschiedenartige Ausgestaltungen erfahren. In der obenerwähnten Dissertation schließt sich nun an die zuvor gekennzeichneten Überlegungen die eingehende Darstellung und logische Analyse einiger Hauptformen der aprioristischen Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs an. Die Überlegungen dieses Kapitels, das nicht in die vorliegende Arbeit aufgenommen worden ist, erstrecken sich auf die „subjektive" Wahrscheinlichkeitstheorie von C. Stumpf, auf J. v. Kries' Spielraumtheorie der Wahrscheinlichkeit, auf J. M. Keynes' logische Theorie der Wahrscheinlichkeitsbeziehung und schließlich auf die gleichfalls logisch orientierte Waismann-Wittgensteinsche Theorie der Wahrscheinlichkeit. Sie legen im Anschluß an kritische Hinweise von H. Reichenbach dar, daß eine aprioristische Wahrscheinlichkeitstheorie die Funktion der Wahrscheinlichkeitsaussagen in der empirischen Wissenschaft nicht verständlich machen könne; darüber hinaus suchen sie deutlich zu machen, daß die aprioristische Theorie sich bereits unter rein logischen Gesichtspunkten als unhaltbar erweise, wenn ihre Grundgedanken konsequent durchgeführt werden. Dieser Gedanke wird besonders in einer eingehenden Kritik jenes angeblichen Grundsatzes entwickelt, der als „Prinzip vom mangelnden Grunde" oder als „Indifferenzprinzip" die Hauptstütze der aprioristischen Wahrscheinlichkeitstheorien in ihren verschiedenen Gestalten bildet. — Die Theorie von Keynes, die die konsequenteste und präziseste gegenwärtig vorliegende Durchführung der aprioristischen Auffassung der Wahrscheinlichkeit darstellt, wird auch nach der kalkülmäßigen Seite hin näher untersucht; dabei ergibt sich über die oben angedeuteten logisch-erkenntnistheoretischen Einwände hinaus eine Reihe von bisher wohl nicht beachteten wesentlichen Lücken und Widersprüchen schon im formalen Teil des Systems.

Alle diese Schwierigkeiten lassen den Versuch einer aprioristischen Begründung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs als verfehlt erscheinen. In dem — auch in der vorliegenden Arbeit abgedruckten — Schluß-

kapitel der Dissertation wird daher der Versuch gemacht, die statistische Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, die der logischen Eigenart der Wahrscheinlichkeitsaussagen der empirischen Wissenschaft gewiß weitgehend gerecht wird, so abzuändern, daß der eingangs erwähnte schwerwiegende Einwand entfällt. Hierzu wird neben der v. Misesschen Theorie auch die neuerdings von H. Reichenbach entwickelte, logisch wesentlich vertiefte Form der statistischen Theorie in die Untersuchung einbezogen, auf die der erwähnte Einwand in etwas abgeänderter Form übertragen wird. Auf Grund einer Trennung zwischen formal-mathematischer und physikalischer Wahrscheinlichkeitstheorie wird dann der Nachweis versucht, daß der Grund für die noch unbehobenen Schwierigkeiten der empiristischen Theorie in dem Umstande liegt, daß man bisher dem Übergang vom Wahrscheinlichkeitsbegriff eines mathematischen Kalküls zu dem Wahrscheinlichkeitsbegriff in der physikalischen Wahrscheinlichkeitstheorie stets eine transfinite, auf den Limesbegriff gestützte Deutungsvorschrift zugrunde gelegt habe, ein Verfahren, das — im Gegensatz zur üblichen Auffassung — keineswegs unumgänglich sei; und daß durch die Wahl einer geeigneten, in der Arbeit näher gekennzeichneten finiten Deutungsvorschrift die erwähnten logischen Schwierigkeiten behoben werden könnten, ohne daß der Wahrscheinlichkeitskalkül in seiner Form geändert oder in seiner Anwendung irgendwie eingeschränkt werden müßte.

Die Dissertation ist aus dem Versuch einer systematischen Auseinandersetzung mit den Hauptformen der aprioristischen Wahrscheinlichkeitstheorie hervorgegangen. Die Anregung zu dieser Auseinandersetzung gab mir Herr Professor Dr. Hans Reichenbach, jetzt Ordinarius für Philosophie an der türkischen Staatsuniversität zu Istanbul, dem ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank ausspreche.

Bei der Durchführung der Überlegungen des Schlußkapitels hat mich Herr Professor Dr. Rudolf Carnap, Ordinarius für Naturphilosophie an der Deutschen Universität zu Prag, mehrfach in liebenswürdigster Weise beraten, wofür ihm hier nochmals herzlich gedankt sei.

Mai 1934. Carl Gustav Hempel.

Kapitel I.

Problemstellung.

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit hat im Laufe seiner geschichtlichen Entwicklung ständig an Bedeutung für die wissenschaftliche Erkenntnis gewonnen: in seiner exakteren Fassung aus mathematisch-kombinatorischen Betrachtungen zur Theorie der Glücksspiele hervorgegangen, fand er bald Eingang in die Untersuchungen der Physik und wurde mit großem Erfolg in der Fehlertheorie und dann auch in der kinetischen Gastheorie angewandt. In dieser ersten Phase seiner Entwicklung galt der Wahrscheinlichkeitsbegriff im wesentlichen als ein Hilfsbegriff, dessen Einführung durch die Unvollkommenheit der menschlichen Erkenntnis bedingt sei, und der im Prinzip — bei hinreichender Verfeinerung der physikalischen Meßtechnik und entsprechender Vervollkommnung der mathematischen Methoden — zugunsten streng deterministischer Begriffsbildungen eliminiert werden könne. Durch die statistische Interpretation des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik indessen gewann der Wahrscheinlichkeitsbegriff bereits eine viel grundsätzlichere Bedeutung, und im Verlaufe der jüngsten Entwicklung der Quantentheorie schließlich ist er zu einem Fundamentalbegriff der gesamten Physik geworden. — Auch auf anderen Gebieten der empirischen Wissenschaft hat der Wahrscheinlichkeitsbegriff inzwischen seine Fruchtbarkeit bewiesen: es sei nur an die Bedeutung der statistischen Methoden für Biologie und Soziologie erinnert.

Es ist nun eine bemerkenswerte Tatsache, daß die logische Eigenart dieses Begriffes, der in der empirischen Wissenschaft mit so großem Erfolge angewandt wird, noch keineswegs bis ins letzte geklärt ist. Die Frage nach der Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs oder — was damit gleichbedeutend ist — nach dem Sinn der Sätze, in denen dieser Begriff auftritt, hat bisher noch keine einheitliche und eindeutige Beantwortung erfahren; vielmehr sind von fachwissenschaftlicher sowohl wie von rein philosophischer Seite eine ganze Reihe verschiedener Theorien der Wahrscheinlichkeit entwickelt worden, die sich für eine erste Orientierung in zwei große Gruppen einordnen lassen: in die Gruppe der empiristisch-statistischen und in die der aprioristischen Theorien des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

Die Theorien der letztgenannten Gruppe gehen von dem Gedanken aus, die Wahrscheinlichkeitsaussagen beruhten im wesentlichen auf Urteilen apriori über empirische oder logische Spielraumsverhältnisse, sie nehmen oft kaum auf den in der empirischen Wissenschaft üblichen Gebrauch des Wahrscheinlichkeitsbegriffs bezug und weichen deshalb schon in ihren Grundlagen aufs stärkste voneinander ab.

Die empiristischen Wahrscheinlichkeitstheorien dagegen sind von ihren Vertretern an Hand einer sorgfältigen Untersuchung des naturwissenschaftlichen Erkenntnisverfahrens und daher in den Grundzügen sehr einheitlich entwickelt worden — wir werden daher zuweilen auch von „d e r empiristischen Theorie der Wahrscheinlichkeit" sprechen —; ihre Fundamentalthese ist die, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im wesentlichen mit der empirisch zu ermittelnden relativen Häufigkeit seines Auftretens in statistischen Beobachtungsreihen identisch ist.

Obgleich indessen die empiristische Theorie die logische Funktion des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der empirischen Wissenschaft in wesentlichen Punkten zweifellos zutreffend wiedergibt, so führt sie doch andererseits, wie gerade ihre neueren präzisen Ausgestaltungen erkennen lassen, an einer zentralen Stelle in tiefliegende logische Schwierigkeiten, die man bisher kaum als restlos geklärt bezeichnen kann; und so kommt es, daß auch gegenwärtig die durch den Gegensatz jener beiden Theoriengruppen gekennzeichnete Diskussion über den logischen Charakter des Wahrscheinlichkeitsbegriffs noch nicht als abgeschlossen gelten darf.

Die vorliegende Arbeit versucht nun, durch eine vorwiegend an logischen Gesichtspunkten orientierte kritische Analyse einiger neuerer Formen der empiristischen Theorie der Wahrscheinlichkeit einen Beitrag zur Klärung dieser erkenntnistheoretisch so unbefriedigenden Situation zu liefern [1]).

Der Untersuchung liegt der Gedanke zugrunde, daß das Ziel jeder wissenschaftlichen Bemühung um das Problem der Wahrscheinlichkeit in einer deskriptiven Theorie des wissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu bestehen habe. Diese Vorbemerkung erscheint hier als nicht unwesentlich, weil selbst in neueren Arbeiten häufig der Versuch unternommen worden ist, ohne Rücksicht auf die logische Funktion des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Wissenschaft eine Wahrscheinlichkeitstheorie spekulativ zu entwickeln und nachträglich auch den wissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu dieser allgemein-

1) In einem Aufsatz in der Zeitschrift „Erkenntnis" hoffe ich demnächst u. a. eine kritische Untersuchung einiger Hauptformen der aprioristischen Theorie vorlegen zu können.

philosophischen Konstruktion in Beziehung zu setzen; so z. B. wenn behauptet wird, von Wahrscheinlichkeit dürfe „im Grunde" nur da gesprochen werden, wo eine Reihe gleichmöglicher Fälle vorliege; oder: „in Wirklichkeit" sei die Wahrscheinlichkeit eine eindeutige Funktion der Ähnlichkeit; oder wenn zwischen „subjektiver" und „objektiver", „quantitativer" und „qualitativer", „philosophischer" und „mathematischer" Wahrscheinlichkeit unterschieden wird (vgl. Eisler [Philos. Begr.], Bd. 3, S. 492) [2]). Derartige Spekulationen, deren sachlicher Gehalt oft ganz problematisch bleibt, haben jedenfalls keinen Platz in einer Erkenntnistheorie, die wirklich eine Theorie der wissenschaftlichen Erkenntnis darstellen will.

Die eben erwähnten Spekulationen zeigen einen gewissen inneren Zusammenhang mit der gelegentlich ausdrücklich vertretenen Ansicht, daß eine Analyse des wissenschaftlichen Gebrauchs eines Begriffs, wie wir sie hier im Auge haben, nicht zu einer erschöpfenden „Wesensbestimmung" führen könne. So meint z. B. Czuber ([Grundlagen] S. 42), daß es — besonders in der Physik — viele Begriffsbestimmungen gebe, die nicht „das Wesen der Sache" träfen, sondern nur „auf die Methode ihrer wissenschaftlichen Behandlung" gerichtet seien. Die hier zugrunde gelegte Unterscheidung läßt sich indessen aus Gründen der Logik nicht aufrechterhalten. Die logische Funktion eines Begriffs nämlich besteht darin, daß der Begriff in Sätzen von bestimmter Form auftreten kann; und seine Bedeutung ist vollständig bestimmt, wenn der Sinn aller Sätze dieser Form festgelegt ist. Die Bedeutung eines Begriffs ist, mit anderen Worten, durch seine logische Konstitution bestimmt (vgl. Carnap [Aufbau]). Damit aber ist die Bedeutung des Begriffs erschöpft: es hat keinen Sinn, noch darüber hinaus von dem „Wesen" des von ihm bezeichneten Gegenstandes zu sprechen, das nicht durch diese Angaben erfaßt werde. Denn falls über jenes „Wesen" irgendwelche logisch legitimen Aussagen gemacht werden können, so gehören diese Aussagen bereits zu denjenigen, die die Konstitution des fraglichen Begriffs und damit auch die Form seiner Anwendung in wissenschaftlichen Sätzen mitbestimmen.

Das gilt insbesondere auch für die Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, und es gibt daher — wie schon angedeutet — keine andere Methode zur Lösung des Wahrscheinlichkeitsproblems als die logische Analyse der Form und des Sachgehalts derjenigen wissenschaftlichen Sätze, in denen der Wahrscheinlichkeitsbegriff logisch legitim auftritt. Wir wollen solche Sätze „Wahrscheinlichkeitsaus-

2) Die Literaturhinweise beziehen sich auf das am Schluß der Arbeit befindliche Literaturverzeichnis; jede Veröffentlichung wird mit dem dort angegebenen Kurzzeichen zitiert.

sagen“ nennen. Die Einführung dieses Terminus soll lediglich eine kurze Bezeichnung ermöglichen, ohne indessen einer genaueren logischen Analyse jener Gebilde vorzugreifen: es wäre nämlich denkbar, daß sie keine „Aussagen“ oder „Sätze“ im Sinne der klassischen Logik darstellen.

Wir treten nun in die Untersuchung des logischen Charakters der wissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsaussagen ein und beginnen mit der Analyse einiger Beispiele, an Hand deren sich auch die Grundgedanken der empiristischen Theorie unschwer entwickeln lassen.

Kapitel II.

Logische Analyse einiger neuerer Ausgestaltungen der empiristisch-statistischen Theorie der Wahrscheinlichkeit.

§ 1. Der Grundgedanke der statistischen Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs und seine logische Problematik.

Als Ausgangspunkt der Betrachtung diene eine Reihe von Anwendungsfällen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs aus verschiedenen Gebieten der empirischen Wissenschaft.

1. Der Sinn eines Satzes wird durch seine „Wahrheitsbedingungen" bestimmt, d. h. durch diejenigen Bedingungen, unter denen der Satz in der Wissenschaft als wahr bezeichnet wird. Betrachten wir z. B. Aussagen über die Zerfallswahrscheinlichkeiten radioaktiver Substanzen: hier stützt sich die physikalische Nachprüfung auf die Feststellung der relativen Häufigkeit der zerfallenden Atome, bezogen auf die Gesamtzahl der vorhandenen. Der Satz: „Die Zerfallswahrscheinlichkeit (Zerfallskonstante) des Radiums ist $1{,}39.10^{-11}$" besagt also: „In einer großen Menge von Radiumatomen zerfällt in jeder Sekunde durchschnittlich ein bestimmter Bruchteil der jeweils vorhandenen Zahl. Dieser Bruchteil wird durch die Zahl $1{,}39.10^{-11}$ gegeben."

2. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Atom eines bestimmten idealen Gases bei einer bestimmten Temperatur T eine Geschwindigkeit besitzt, deren Komponenten bzw. zwischen v_x und $v_x+\triangle v_x$, v_y und $v_y+\triangle v_y$, v_z und $v_z+\triangle v_z$ liegen, wird ebenfalls durch eine relative Häufigkeit gegeben, nämlich durch den Bruchteil derjenigen Atome einer großen Zahl von Atomen eines idealen Gases der Temperatur T, deren Geschwindigkeit in dem angegebenen Gebiet des Geschwindigkeitsraumes liegt.

3. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein bestimmtes Elektrometer in einer bestimmten Aufstellung pro Minute der Beobachtungszeit genau einen Ausschlag infolge der Höhenstrahlung zeigt, bezieht sich auf die relative Häufigkeit derjenigen Zeitabschnitte von je einer Minute Länge, innerhalb deren das Elektrometer genau einen Ausschlag zeigt; dabei wird vorausgesetzt, daß eine längere Zeit hindurch beobachtet wird.

In diesem Falle handelt es sich um eine zeitliche Mittelung, in dem zuvor genannten Beispiel um ein Scharmittel. Gemeinsam ist beiden

Formen die Bezugnahme auf „eine hinreichend große Zahl von Fällen". Im übrigen läßt sich die zuletzt betrachtete Wahrscheinlichkeit auch im Sinne eines Scharmittels einführen — sie bezieht sich dann auf eine große Reihe gleichartiger und den gleichen Bedingungen ausgesetzter Elektrometer, die alle während einer Minute beobachtet werden. Die Wahrscheinlichkeit gibt den Bruchteil der Elektroskope an, die genau einen Ausschlag zeigen. Begrifflich sind diese beiden Bestimmungen der unter 3 eingeführten Wahrscheinlichkeit natürlich verschieden; die Physik rechnet indessen damit, daß beide Bestimmungen zu demselben Zahlwerte führen; die Einführung dieser Hypothese entspricht einem methodischen Prinzip der klassischen Physik, demzufolge „Raum und Zeit keine physikalischen Ursachen darstellen", oder korrekter: demzufolge die raumzeitlichen Koordinaten nicht explizite in die Naturgesetze eingehen.

Entsprechend können die unter 2 betrachteten Wahrscheinlichkeiten als zeitlich gemittelte relative Häufigkeiten eingeführt werden. Bei der experimentellen Ermittelung solcher Wahrscheinlichkeiten werden oft beide Bestimmungen miteinander kombiniert. Dem liegt die erwähnte Hypothese zugrunde.

4. Die Reihe dieser Beispiele läßt sich leicht verlängern; es sei nur noch an die Stoßwahrscheinlichkeiten erinnert, ferner an die Wahrscheinlichkeiten von Anregungszuständen irgendwelcher Atome oder Moleküle, schließlich an die Übergangswahrscheinlichkeiten der B o h r s c h e n Theorie. In allen Fällen beziehen sich die betreffenden Wahrscheinlichkeitsaussagen auf die relativen Häufigkeiten gewisser Ereignisse innerhalb großer Gesamtheiten.

5. Bei der Untersuchung des Sinnes derjenigen Wahrscheinlichkeitsaussagen, die die typischen Beispiele der älteren Lehrbuchliteratur bilden, nämlich der Wahrscheinlichkeitsaussagen über Glücksspiele, hat man häufig eine ganz andere Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs geben zu müssen geglaubt, die auf einer Einteilung der sogenannten „möglichen Fälle" in „günstige" und „ungünstige" beruhte, und die die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als den Quotienten aus der Anzahl der dem Ereignis günstigen Fälle und der Anzahl der überhaupt möglichen Fälle definierte. Auf eine nähere Untersuchung dieser Auffassung, die für eine Untergruppe der oben erwähnten aprioristisch-logischen Wahrscheinlichkeitstheorien charakteristisch ist, muß in dieser Arbeit verzichtet werden; es sei aber ausdrücklich daran erinnert, daß im Zweifelsfalle — für den Spieler nicht anders als für den Physiker — die s t a t i s t i s c h e Untersuchung über den Wert der betreffenden Wahrscheinlichkeit entscheidet. Wenn etwa ein als regelmäßig angenommener Würfel in einer längeren Reihe von Ver-

suchen eine der Seiten wesentlich öfter als bei $^1/_6$ aller Würfe auftreffen läßt, so wird dies von den Vertretern der klassisch-aprioristischen Wahrscheinlichkeitstheorie als ein Beweis dafür angesehen, daß die bei der Anwendung der klassischen Begriffsbildung vorausgesetzten „gleichmöglichen" Fälle eben doch nicht vorgelegen haben.

6. Daß auch die Wahrscheinlichkeitsaussagen der sozialen oder der medizinischen Statistik sich auf die Bestimmung relativer Häufigkeiten stützen, liegt auf der Hand. In der Tat läßt sich etwa eine Aussage über die Sterbenswahrscheinlichkeit bei Diphtheritis unschwer in die entsprechende Aussage über die relative Häufigkeit von Sterbefällen unter Diphtheritiskranken übertragen.

Aus derartigen Beispielen wissenschaftlicher Wahrscheinlichkeitsaussagen, deren Zahl beliebig vermehrt werden kann, entnimmt man, daß die wissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsaussagen bestimmte empirisch ermittelte oder ermittelbare Größen betreffen, nämlich die relativen Häufigkeiten gewisser Ereignisse in ausgedehnten Versuchs- oder Beobachtungsreihen. Diese Einsicht bildet den Grundgedanken der empiristischen Theorien der Wahrscheinlichkeit, die, wie aus dem Vorstehenden verständlich, häufig auch als „statistische" Theorien bezeichnet werden.

In ihren neueren Ausgestaltungen suchen diese Theorien zunächst die logische Form der wissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsaussagen in dem eben entwickelten Sinne präziser zu kennzeichnen. Nun geht die mehrfach erwähnte Beschränkung der Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen auf lange Beobachtungsreihen von dem empirischen Befunde aus, daß im allgemeinen mit zunehmender Länge der Beobachtungsreihen die entsprechenden relativen Häufigkeiten sich immer weniger voneinander unterscheiden, und die statistische Wahrscheinlichkeitstheorie sucht diesem Grundgedanken aller physikalischen Wahrscheinlichkeitsansetzungen eine präzise und mathematisch auswertbare Gestalt zu geben. Sie führt hierzu die Annahme ein, daß bei beliebiger Verlängerung einer solchen Beobachtungsreihe die relativen Häufigkeiten eines bestimmten Ergebnisses gegen einen Grenzwert konvergieren; diesen bezeichnet sie als die Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ergebnisses. Die Aussage: „Die Wahrscheinlichkeit eines Vierer-wurfes mit diesem Würfel ist $^1/_6$", besagt also der statistischen Deutung zufolge: „Der Prozentsatz der Fälle, in denen mit diesem Würfel eine Vier geworfen wird, konvergiert mit wachsender Zahl der Würfe gegen $^1/_6$." — Dies scheint in der Tat der genaue Ausdruck dessen zu sein, was die empirische Wissenschaft tatsächlich unter Wahrscheinlichkeit versteht und worauf auch in den obigen Beispielen mit der Voraussetzung „langer" Beobachtungsreihen abgezielt wurde.

Indessen ist die hiermit gewonnene Begriffsbildung einem schwerwiegenden Bedenken ausgesetzt, auf das mit besonderem Nachdruck von Reichenbach und von Feigl hingewiesen worden ist. Das Bedenken knüpft an die Erwägung an, daß der Übergang zum Limesbegriff der Wahrscheinlichkeit die Angabe irgendwelcher nachprüfbarer Wahrheitsbedingungen für eine Wahrscheinlichkeitsaussage unmöglich macht. Behauptungen über den Limes der relativen Häufigkeit in Beobachtungsreihen nämlich sind auf keine Weise finit kontrollierbar: es läßt sich ja jede endliche Zahlenreihe durch Anfügung eines passend gewählten Reststückes zu einer unendlichen Folge mit beliebig wählbarem Limes ergänzen; man kann also aus einem noch so langen endlichen Anfangsstück einer Folge nichts über ihren Limes entnehmen. Für physikalische Beobachtungsreihen ergibt sich hieraus: Da wir immer nur endliche Mengen von Fällen beobachten können, so können wir grundsätzlich nichts über die Grenzwerte der relativen Häufigkeiten aussagen, die sich ergeben „würden", wenn wir die Reihe der Beobachtungen bis ins Unendliche fortsetzen könnten. Die Wahrscheinlichkeitsaussagen sind daher, im Sinne der statistischen Theorien interpretiert, grundsätzlich nicht nachprüfbar und somit sinnleer.

Die erwähnten Autoren — besonders Feigl in seiner Dissertation [2a]) — deuten noch weitere Schwierigkeiten an, die sie als Konsequenzen der Limesdefinition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes betrachten: Wird etwa die Wahrscheinlichkeit der Fünferwürfe mit einem bestimmten Würfel zu $p = 0{,}16$ angesetzt, so besagt dies der statistischen Theorie zufolge, daß in einer beliebig verlängert zu denkenden Reihe von Würfen mit diesem Würfel die relative Häufigkeit der Fünferwürfe gegen 0,16 konvergiert:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E_5(n)}{n} = 0{,}16 \tag{1}$$

wobei $E_5(n)$ die Zahl der Fünferwürfe unter den ersten n Würfen bezeichnet. Dies bedeutet aber, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Stellennummer $N(\varepsilon)$ existiert derart, daß für $n \geq N(\varepsilon)$ gilt:

$$\left| \frac{E_5(n)}{n} - 0{,}16 \right| < \varepsilon \tag{2}$$

Hierin erblicken nun die genannten Autoren einen Widerspruch zu den in der Physik üblichen Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsansetzung: Sei etwa $\varepsilon = 0{,}001$ und $N(\varepsilon) = 2500$, dann wird durch die Ungleichung (2) offenbar u. a. ausgeschlossen, daß die ersten 2500 Würfe mit dem betrachteten Würfel abwechselnd eine 5 und ein von

2a) Wien, etwa 1928; nicht im Druck erschienen.

5 verschiedenes Ergebnis liefern. Gerade in den Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen der Physik will man aber mit dem Wahrscheinlichkeitsansatz $p = 0{,}16$ derartige „unwahrscheinliche" Ereignisserien keineswegs als unmöglich ausschließen; man erwartet im Gegenteil, daß in einer langen Serie von Versuchsreihen zu je N Würfen ein bestimmter Prozentsatz dieser Reihen die angegebene Resultatverteilung aufweist. (Charakteristische Beispiele für diese Auffassung finden sich in der kinetischen Theorie der Materie. Der geometrische Ausdruck der hiermit angedeuteten Auffassung der Physik ist der asymptotische Verlauf der Verteilungskurven, die in der statistischen Physik betrachtet werden.)

Ferner erkennt man, daß von einer hinreichend „späten" Stelle ab jene unwahrscheinliche Serie von 2500 Würfen auftreten kann, ohne daß noch die Ungleichung (2) verletzt würde. So würde also durch die statistische Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs der Anfangspunkt der Beobachtungsreihe eine Auszeichnung erfahren, die weder im physikalischen Wahrscheinlichkeitsansatz mitgemeint ist noch überhaupt physikalisch gerechtfertigt werden kann.

Die zuletzt genannten Bedenken scheinen mir indessen keine notwendige Konsequenz der Limesdefinition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu sein. Stellt man sich nämlich auf den Boden jener transfiniten Begriffsbildung, so kann man sich jedenfalls die Folge der relativen Häufigkeiten in einer Beobachtungsreihe nicht intensional, durch ein mathematisches Gesetz, sondern lediglich extensional gegeben denken. Dann ist aber die Funktion $N(\varepsilon)$ erst bestimmt, wenn gewissermaßen die ganze unendliche Folge einem idealen Beobachter fertig vorliegt. Denkt man sich demgemäß im obigen Beispiel den zu $\varepsilon = 0{,}001$ gehörigen Wert von $N(\varepsilon)$ erst durch den konkreten Verlauf der Wurffolge bestimmt, nicht aber ein für allemal schon dem Würfel zugeordnet (wie es in den letzten Betrachtungen stillschweigend vorausgesetzt wird), so entfallen offensichtlich die obigen Einwände. Dagegen bleibt der erste Einwand bestehen, daß die Idee eines „idealen Beobachters", der unendliche Reihen physikaler Ereignisse überblicken könnte, prinzipiell nicht realisiert werden kann; exakter ausgedrückt: daß bei Einführung eines transfiniten Wahrscheinlichkeitsbegriffs die Wahrscheinlichkeitsaussagen sämtlich nicht nachprüfbar und somit sinnleer werden, und daß daher schon der transfinite Ansatz der statistischen Wahrscheinlichkeitstheorie gar nicht die logische Eigenart der wissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsaussagen zum Ausdruck bringt. die augenscheinlich empirischen Befunden zugeordnet sind und daher durch empirische Kriterien in irgendeiner Weise finit nachprüfbar sein müssen.

Nach diesen Bemerkungen über den Grundgedanken der statistischen Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, der erst in jüngerer Zeit klar herausgearbeitet worden ist (Venn, der zu den Begründern der Theorie gehört, war noch nicht zu der Präzisierung mittels des Limesbegriffs gelangt), werde nun eine der scharfsinnigsten und vollständigsten gegenwärtig vorliegenden Durchführungen der empiristischen Theorie betrachtet, die von R. v. Mises entwickelte empiristisch-statistische Theorie der Wahrscheinlichkeit.

§ 2. Der logische Charakter der Wahrscheinlichkeitstheorie von R. v. Mises.

R. v. Mises (cf. besonders [Wahrscheinlichkeit] und [Wahrscheinlichkeitsrechnung]) stellt sich die Aufgabe, einen strengen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu geben, die er als die mathematische Theorie eines gewissen Zweiges der Naturwissenschaft ansieht, genau so, wie die formale Geometrie die mathematische Theorie der physikalischen Geometrie darstellt.

Das Geometrieproblem darf heute auf Grund der logischen und erkenntnistheoretischen Untersuchungen der letzten hundert Jahre, die besonders durch die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien angeregt worden sind, als gelöst bezeichnet werden. Man unterscheidet nunmehr zwischen „formalen“ oder „mathematischen“ Geometrien einerseits und der „physikalischen“ Geometrie andererseits. Eine Geometrie als mathematische Disziplin stellt ein System von Sätzen dar, die aus gewissen Ausgangssätzen, den Axiomen, rein logisch deduziert werden können. In den Axiomen treten gewisse Grundbegriffe auf wie „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“, „Kongruenz“, „Inzidenz“ usw., die nicht explizite definiert werden, und die zunächst keine anschauliche Bedeutung besitzen. Alle Eigenschaften und Beziehungen der Grundbegriffe, die für die formalen Ableitungen vorausgesetzt werden, sind in den Axiomen formuliert, die daher zuweilen nach dem Vorgange von Hilbert als „implizite Definitionen“ der Grundbegriffe des Systems bezeichnet werden. Die Frage nach der „Geltung“ der Sätze einer solchen Geometrie erledigt sich durch den Hinweis, daß jeder geometrische Lehrsatz sich als eine generelle Implikation darstellen läßt, die die Konjunktion aller Axiome als Implikans und den Lehrsatz als Implikat enthält, — und daß jede solche Implikation nach dem zuvor Gesagten eine „Tautologie“ darstellt, also keinen „empirischen Gehalt“ besitzt. (Wegen der letztgenannten beiden Begriffe cf. z. B. Wittgenstein [Tractatus], Carnap [Logistik].) Daher entsteht für keine der beliebig vielen möglichen formalen Geometrien ein „Gel-

tungsproblem“ (Reichenbach) im Sinne der empirischen Wissenschaften. Die Frage der „Geltung“ einer bestimmten Geometrie, wie sie besonders durch die Entwicklung der Raum-Zeit-Lehre der allgemeinen Relativitätstheorie angeregt worden ist, entsteht vielmehr erst gegenüber den Sätzen der physikalischen Geometrie, der physikalischen Theorie von den allgemeinen Lagebeziehungen physikalischer Gebilde, besonders der starren Körper. Ihre Sätze gehen aus denen der entsprechenden formalen Geometrie durch eine inhaltliche „Deutung“ der Grundbegriffe des Axiomensystems hervor, die auf dem von Reichenbach näher untersuchten Wege der Zuordnungsdefinition erfolgt (cf. besonders Reichenbach [Physik], Ziff. 10 und 15; [Relat. Ax.]; [Raum-Zeit-Lehre]). Auf diese Weise gehen die Sätze der Geometrie in gewisse physikalische Sätze über — die natürlich je nach der Wahl des formalgeometrischen Systems verschieden sind, und deren Geltung nun mit empirischen Methoden untersucht werden kann. Für eine solche Untersuchung würde es in jedem Falle genügen, sich der Geltung der inhaltlich interpretierten Axiome zu versichern, da alle anderen Sätze aus diesen deduzierbar, also mit ihnen zugleich wahr sind.

Nach dieser Erinnerung wird man die v. Misessche Theorie vielleicht am klarsten als den Versuch bezeichnen können, die erkenntnistheoretische Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in völliger Analogie zu Geometrieproblem zu klären (cf. z. B. v. Mises [Wahrscheinlichkeit], S. 32).

Eine Klärung des Wahrscheinlichkeitsproblems in diesem Sinne hätte durch (I) Aufstellung einer Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung und durch (II) Angabe der Zuordnungsdefinitionen zu allen in dieser Axiomatik auftretenden Grundbegriffen (außerlogischen Konstanten) zu erfolgen.

In der Tat hat nun v. Mises einen axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung unternommen. Wir wollen ihn zunächst in seinen Grundzügen darstellen und dann untersuchen, ob er die erkenntnistheoretische Gleichartigkeit des Wahrscheinlichkeitsproblems mit dem Geometrieproblem nachzuweisen gestattet.

Der Fundamentalbegriff der v. Misesschen Theorie ist der des Kollektivs. Dabei wird als „einfachstes Kollektiv“ oder „Alternative“ eine unendliche Folge gleichartiger Beobachtungen definiert, deren jedesmalige Ergebnisse durch zwei Zeichen, etwa „0“ und „1“, dargestellt werden können, und die folgenden zwei Forderungen genügt:

1. Forderung: Ist n_0 bzw. n_1 die Anzahl derjenigen unter den ersten n Beobachtungen, deren Ergebnis „0“ bzw. „1“ ist, so existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_0}{n} = w_0; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n_1}{n} = w_1.$$

2. Forderung: Wird aus der Gesamtfolge durch „Stellenauswahl" eine unendliche Teilfolge gebildet, so existieren auch innerhalb dieser Teilfolge die gleichen Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_0'}{n'} = w_0; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n_1'}{n'} = w_1.$$

Dabei wird unter einer „Stellenauswahl" aus einer unendlichen Beobachtungsfolge die Bildung einer Teilfolge auf Grund einer Vorschrift verstanden, die allgemein über die Zugehörigkeit der n-ten Beobachtung zur Teilfolge unabhängig von dem Ergebnis dieser n-ten Beobachtung und höchstens unter Benutzung der vorangegangenen Beobachtungsergebnisse entscheidet.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff wird nun ausschließlich mit Bezug auf Kollektive definiert; und zwar werden die oben eingeführten Grenzwerte w_0 und w_1 als die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten des Merkmals „0" bzw. „1" innerhalb des betrachteten Kollektivs bezeichnet.

Auf den Begriff der Alternative läßt sich nun der Begriff des allgemeinen Kollektivs zurückführen, das k verschiedene Ergebnisse für jede Beobachtung zuläßt. Da diese Begriffsbildung indessen keinen neuen Gesichtspunkt von grundsätzlicher Bedeutung in die v. Misessche Theorie einführt, so können wir uns in der folgenden Untersuchung auf die Theorie des einfachsten Kollektivs beschränken.

Die eben formulierten Bedingungen, die ein Kollektiv charakterisieren, bilden die Axiome der v. Misesschen Theorie der Wahrscheinlichkeit. (Die zweite Forderung wird von v. Mises als „Regellosigkeitsaxiom" bezeichnet.) Diese Theorie ist nichts anderes als die rein mathematische, also logisch-deduktive Theorie der Limites der relativen Häufigkeiten in Folgen mit Kollektivcharakter; die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat, wie v. Mises nachdrücklich betont, lediglich die Aufgabe, aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten andere zu berechnen; ausführlicher: aus den als gegeben vorausgesetzten Limites der relativen Häufigkeiten innerhalb gewisser Ausgangskollektivs die Limites der relativen Häufigkeiten (die „Verteilung") innerhalb gewisser neuer Kollektivs zu ermitteln, die nach bestimmten, genau präzisierbaren Methoden aus den ursprünglichen Kollektivs hergestellt („abgeleitet") sind. Wie v. Mises zeigt, reichen vier genau angebbare Methoden der Ableitung neuer Kollektivs aus gegebenen und die Berechnung der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten dazu hin, alle Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beherrschen; die Berechnung der Verteilung in einem abgeleiteten Kollektiv aus den Verteilungen in den gegebenen

erfolgt, wie nochmals betont sei, rein deduktiv; sie stützt sich auf die Hilfsmittel der mathematischen Analysis, aber nicht auf Voraussetzungen empirischer Art.

Durch Aufstellung dieser Theorie hat v. Mises wesentlich zur Klärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs beigetragen. Insbesondere ermöglichen es seine Untersuchungen, eine Reihe von wichtigen Mißverständnissen aufzuklären, die den meisten der bis dahin entwickelten Theorien der Wahrscheinlichkeit, vor allem einigen aprioristischen Interpretationen zugrunde liegen. —

(I) Freilich entsteht bereits im Rahmen dieses formalen Aufbaus der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Schwierigkeit, die hier kurz erwähnt werde: Die zweite der obengenannten Forderungen, denen ein Kollektiv genügt, führt zu der Konsequenz, daß Zahlenfolgen mit Kollektivcharakter nicht intensional, d. h. durch ein allgemeines Bildungsgesetz für ihre Glieder, gegeben werden können (vgl. R. v. Mises [Grundlagen], S. 60). Eine unendliche mathematische Folge andererseits kann aber aus rein logischen Gründen nicht anders als durch ihr Bildungsgesetz festgelegt werden [3]), und daher stellt schon der Kollektivbegriff keinen eigentlichen mathematischen Begriff dar. Da bereits von mehreren Autoren (cf. besonders Reichenbach [Axiomatik], § 7; Kamke [Begründungen]; ders. [Wahrscheinlichkeitstheorie]; Dörge [Begründung]; Waismann [Analyse]) eine eingehende Diskussion der in diesem Zusammenhang entstehenden intern-mathematischen Schwierigkeiten des Regellosigkeitsaxioms gegeben worden ist, und da ferner gegenwärtig mehrere Ausgestaltungen der statistischen Theorie vor-

3) Man kann geradezu sagen, daß erst dieser Umstand die Anwendung des Begriffs der „unendlichen Folge" in der mathematischen Analysis legitimiert; denn erst die Tatsache, daß die mathematischen Sätze über unendliche Folgen korrekt als Aussagen über die Bildungsgesetze jener Folgen formuliert werden können, ermöglicht eine mathematische Beherrschung des Gebietes durch die „Ausschaltung des Unendlichen" aus der Analysis nach den Methoden der „Epsilontik" (vgl. hierzu etwa Waismann [Analyse], S. 230/31, und besonders Kaufmann [Das Unendliche]). — In der Physik liegt es grundsätzlich anders: eine Reihe physikalischer Beobachtungsdaten ist stets extensional gegeben, nicht durch ein Bildungsgesetz für ihre Glieder. Man darf daher vielleicht sagen, daß hier der letzte Grund der logischen Schwierigkeiten liegt, die der Anwendung eines Limesbegriffs der Wahrscheinlichkeit in der Physik im Wege stehen: Alle jene in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Anwendung kommenden mathematischen Methoden des Operierens mit unendlichen Reihen sind ausschließlich auf intensional gegebene Folgen anwendbar, und die Anwendung dieser Methoden auf extensional-empirisch gegebene Gesamtheiten stellt daher gleichsam einen „überschwänglichen Gebrauch" jener mathematischen Begriffsbildungen dar. (Die besonders von R. v. Mises angeführten Gegenargumente gegen eine solche Beurteilung der logischen Situation werden sogleich erörtert werden.)

liegen, die auf die Einführung eines Regellosigkeitsaxioms völlig verzichten (so besonders diejenigen von K a m k e und von R e i c h e n b a c h — [Axiomatik] —), so genüge hier dieser Hinweis.

v. M i s e s nimmt das Regellosigkeitsaxiom, das mit den angedeuteten Schwierigkeiten verbunden ist, gleichwohl in die Grundlagen seiner Theorie auf, weil er sich die Aufgabe stellt, durch geeignete explizite Definitionen den Begriff des Kollektivs und damit zugleich denjenigen der Wahrscheinlichkeit so festzulegen, daß aus den Definitionen bereits alle Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung mathematisch ableitbar werden. Dieser Punkt ist für die Beurteilung des logischen Charakters der v. M i s e s s c h e n Theorie von grundsätzlicher Wichtigkeit. Hier wird der Grundgedanke einer eigentlichen Axiomatisierung aufgegeben, der ja gerade darin besteht, die Grundbegriffe eines Systems durch außerlogische Konstanten darzustellen und mittels geeigneter Axiome „implizit" zu definieren. Es handelt sich hier nicht um einen Unterschied bloß in der Form der Darstellung: Angenommen nämlich, der Versuch einer expliziten Definition des Kollektivbegriffs, der in der v. M i s e s s c h e n Theorie an den begrifflichen Schwierigkeiten des Regellosigkeitsaxioms scheitert, ließe sich unter völligem Verzicht auf dies Axiom oder mit Hilfe eines mathematisch korrekt formulierten Ersatzaxioms erfolgreich durchführen, so wäre damit doch eine eigentliche Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in dem Sinne, in dem wir z. B. von einer Axiomatisierung der Euklidischen Geometrie oder der Mechanik sprechen, nicht erreicht. Denn da sich nun alle Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung voraussetzungsgemäß aus jenen expliziten Ausgangsdefinitionen deduzieren ließen, so würde die gesamte formale Wahrscheinlichkeitsrechnung aus analytischen Sätzen bestehen — und dasselbe würde zugleich auch für jedes ihr auf Grund irgendeiner Deutungsvorschrift zugeordnete physikalische Satzsystem gelten. Ein System von analytischen Sätzen ist aber, selbst wenn in diesen außerlogische und außermathematische Begriffe, etwa physikalische Zustandsgrößen, auftreten, offenbar nicht als eine empirische Theorie zu betrachten. (Diese Erwägung gilt besonders auch für solche Ausgestaltungen der statistischen Wahrscheinlichkeitstheorie, die, wie diejenige von K a m k e [Wahrscheinlichkeitstheorie], die Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs lediglich auf den Limesbegriff der mathematischen Analysis stützen und auf eine dem Regellosigkeitsaxiom entsprechende Voraussetzung verzichten.) Gerade in dem Umstand also, daß die Regellosigkeitsforderung nicht mathematisch auflösbar ist, kommt der Anspruch der v. M i s e s s c h e n Theorie auf physikalischen Gehalt zum Ausdruck; nur wird jener Gehalt durch das Regellosigkeitsaxiom in eine Form gekleidet, die weder selbst axiomatisch genannt werden kann, noch — wegen der erwähnten Schwierigkeiten —

einen Zugang zur Axiomatisierung erkennen läßt. Der Kollektivbegriff wird also auch durch die Einführung des Regellosigkeitsaxioms nicht zu einem „Grundbegriff" der Axiomatik im üblichen Sinne.

(II) Was ferner die Deutungsvorschrift angeht, die zur physikalischen Interpretation der Formeln der Wahrscheinlichkeitstheorie führt — und hiermit wenden wir uns zu einer Untersuchung der Leistungen der v. Misesschen Theorie für die zweite der oben (S. 21) genannten Teilaufgaben der Axiomatisierung einer physikalischen Theorie —, so ist zunächst folgendes zu bemerken: v. Mises selbst unterscheidet nicht ausdrücklich zwischen der Aufstellung eines Axiomensystems und der Angabe einer physikalischen Deutung; es finden sich aber sowohl in den grundlegenden Definitionen seiner Theorie als auch in den von ihm hierzu gegebenen Erläuterungen zahlreiche Hinweise, die es gestatten, den Begriff des empirischen Kollektivs, wie er v. Mises vorschwebt, genau zu charakterisieren. Will man also — was sich für eine genauere Analyse empfiehlt — die Unterscheidung zwischen dem formalen System einerseits und den die physikalische Deutung vermittelnden Zuordnungsdefinitionen andererseits auch im Falle der v. Misesschen Theorie durchführen, so dürfte man mit folgender Formulierung der Zuordnungsdefinition der v. Misesschen Auffassung gerecht werden: Unter einem physikalischen Kollektiv verstehe man eine beliebig verlängerbare Serie gleichartiger physikalischer Beobachtungsdaten, die den beiden in den Axiomen der Wahrscheinlichkeitsrechnung präzisierten Bedingungen genügt. — Durch diese Festsetzung (die übrigens für die Theorie von Kamke ganz analog zu fassen wäre) erfährt zugleich mit dem Kollektivbegriff auch derjenige der Wahrscheinlichkeit seine physikalische Deutung.

Einer solchen transfiniten Bestimmung des empirischen Kollektivbegriffs gegenüber bleiben nun aber die in § 1 entwickelten Einwände unverändert gültig: alle mittels der Wahrscheinlichkeitstheorie zu gewinnenden Aussagen beziehen sich v. Mises zufolge auf die Limites der relativen Häufigkeiten in Kollektivs und sind daher mit finiten Mitteln, wie sie der empirischen Wissenschaft allein zur Verfügung stehen, grundsätzlich nicht nachprüfbar; Wahrscheinlichkeitsaussagen besitzen also, im Sinne der v. Misesschen Theorie gedeutet, keinen empirischen Gehalt.

v. Mises hat solchen Bedenken gegenüber geltend gemacht, daß die Anwendung des Begriffs der unendlichen Folge auf physikalische Probleme eine Idealisierung darstelle, und zwar von ganz derselben Art wie diejenige, die auch bei der Anwendung geometrischer Begriffe auf die Physik vorgenommen werde ([Grundlagen], § 2; [Diskussion]:

[Wahrscheinlichkeitsrechnung], S. 21 ff.). So setze z. B. die Behauptung, ein bestimmtes physikalisches Gebilde besitze eine Kugelgestalt, die Ausführung unendlich vieler Messungen voraus; tatsächlich entschließe man sich bereits nach einer hinreichend großen endlichen Zahl von Messungen zur Vornahme einer Idealisierung; man beschreibe aus Gründen der Zweckmäßigkeit die endliche Gesamtheit mit Hilfe des Begriffes „Kugel".

In derselben Weise führt man, wie v. Mises sagt, bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf physikalische Fragen jeweils bereits auf Grund endlich vieler Beobachtungen eine Idealisierung ein: „Aus praktischen Gründen bedient man sich der infiniten Theorie, man rechnet, obwohl das Versuchsmaterial endlichen Abschnitten entnommen ist, so, als ob es unendlich wäre ..." ([Diskussion]). — Derselben Auffassung neigt auch Kamke ([Begründungen]) zu.

Indessen läßt sich zeigen, daß dieser Vergleich zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und Geometrie nicht zutreffend ist. Was besagt die Behauptung, daß ein vorgelegter physikalischer Körper eine Kugel — etwa eine homogene Eisenkugel von bestimmter Masse — sei? Untersucht man das Verfahren, nach dem eine solche Aussage physikalisch geprüft wird, so zeigt sich, daß hier gewissermaßen eine unendliche Menge von Aussagen aufgestellt wird; z. B.: es läßt sich auf genau angebbare Weise ein Punkt im Innern des Körpers finden derart, daß je zwei sehr dünne, geradlinige Kanäle, die von zwei beliebigen Punkten der Oberfläche aus zu ihm hin gebohrt werden, gleich lang sind. Ferner: auf einer horizontalen Ebene wird sich der Körper im indifferenten Gleichgewicht befinden; aus einem Überlaufgefäß wird er ein Flüssigkeitsvolumen verdrängen, das in einem bestimmten arithmetischen Zusammenhang mit der Länge seines Durchmessers — einer nach bestimmten Anweisungen zu messenden Strecke — steht; usw.

Mittels der Nachprüfung solcher Folgesätze ist nun auch eine empirische Kontrolle des Ausgangssatzes möglich; diese kann freilich — wegen der unendlichen Menge denkbarer Folgesätze — nicht zu einer vollständigen und endgültigen, sondern immer nur gleichsam zu einer schrittweise sich verbessernden Bestätigung des Ausgangssatzes führen — oder auch zu seiner Widerlegung; dann nämlich, wenn ein empirischer Befund eintritt, der nicht mit dem Ausgangssatz vereinbar ist, z. B. ein von der Voraussage abweichendes Ergebnis des Flüssigkeitsverdrängungversuches. Eine Verschärfung dieser Überlegung werde auf einen späteren Abschnitt dieser Arbeit verschoben. Vorläufig

können wir im Anschluß an die wissenschaftlich übliche Bezeichnungsweise für sprachliche Gebilde dieser logischen Eigenart sagen: Die Behauptung, ein bestimmter physikalischer Körper sei eine Kugel, stellt eine Hypothese dar: sie ist nicht vollständig und endgültig entscheidbar, wohl aber „kontrollierbar" in dem Sinne, daß sie zur Aufstellung beliebig vieler nachprüfbarer Konsequenzen führt.

Die „idealisierende" Behauptung indessen, daß eine vorgegebene endliche Menge von physikalischen Beobachtungsdaten ein Kollektiv bestimme, ist von wesentlich anderem logischen Charakter: Aus ihr läßt sich kein einziger nachprüfbarer Satz herleiten, da aus der Existenz und selbst aus dem Wert des Limes einer unendlichen Folge keinerlei Schlüsse auf die Werte der Glieder in irgendeinem endlichen Abschnitt gezogen werden können. Da nun ausschließlich solche endlichen Abschnitte einer physikalischen Kontrolle zugänglich sind, so haben Ansätze der zuletzt betrachteten Art überhaupt keine nachprüfbaren Konsequenzen: es läßt sich grundsätzlich keine einzige empirische Feststellung als „zu einer solchen Behauptung stimmend" oder als „nicht mit ihr in Einklang befindlich" bezeichnen; kurzum: es liegt hier nicht, wie bei den echten Hypothesen, eine unendliche Gesamtheit von Aussagen vor, sondern eine Scheinaussage über eine unendliche Gesamtheit.

Eine im Sinne der v. Misesschen statistischen Theorie interpretierte Wahrscheinlichkeitsaussage ist — wie noch besonders hervorgehoben werde — im Gegensatz zu einer echten Hypothese auch nicht „näherungsweise" nachprüfbar; denn aus dem Wert der Glieder in einem noch so langen endlichen Abschnitt einer konvergenten Folge kann auf den Wert des Limes gar kein, auch kein näherungsweise zutreffender Schluß gezogen werden.

Die vorstehenden Überlegungen scheinen mir auch zu zeigen, daß — im Gegensatz zu der von v. Mises vertretenen Ansicht — kein empirischer Entscheid darüber möglich ist, ob eine vorgelegte Menge von Daten einem Kollektiv angehört oder nicht, und daß ferner von einer „empirischen Bewährung" der statistisch interpretierten Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht die Rede sein kann, da die statistische Interpretation wesentlich transfinit, jede Entscheidung über Bewährung oder Versagen einer Theorie aber wesentlich finit ist.

Was tatsächlich bei der empirischen Prüfung einer Wahrscheinlichkeitsaussage festgestellt wird, ist gleichsam „viel mehr" als das Bestehen des betreffenden Grenzwertes: es ist die Tatsache, daß die zur Untersuchung stehenden relativen Häufigkeiten schon in endlichen, uns relativ bequem zugänglichen Bereichen bei Verlängerung der Beob-

achtungsreihen i. a. nahezu konstant bleiben; und die Leistung des mathematischen Kalküls der Wahrscheinlichkeitsrechnung scheint also darin zu bestehen, daß er die Zusammenhänge zwischen den relativen Häufigkeiten gerade schon in endlichen Beobachtungsreihen irgendwie im Sinne einer Theorie erfaßt. Die Form dieses Erfassens wird an späterer Stelle (S. 64 ff.) noch genauer untersucht werden.

Hier ist auch der Ort für eine Auseinandersetzung mit der Auffassung, daß der Schluß von den jeweils endlich vielen beobachteten Daten auf das Vorliegen bzw. Nichtvorliegen eines Kollektivs mit seinen charakteristischen transfiniten Eigenschaften ein Induktionsschluß sei, wie er beständig in der Physik angewandt werde. Man macht sich unschwer klar, daß die in der empirischen Wissenschaft üblichen Induktionsschlüsse stets zu Ergebnissen führen, die im obengenannten Sinne „kontrollierbar" sind — nämlich zu singulären oder zu generellen Sätzen; und hieraus ergibt sich ohne weiteres, daß die nicht kontrollierbare Behauptung, eine vorliegende endliche Beobachtungsmenge bestimme ein Kollektiv, auch nicht das Ergebnis eines Induktionsschlusses sein kann.

Noch auf eine weitere Konsequenz der obigen Überlegungen sei hier hingewiesen: Wie bereits erwähnt, knüpfen die Ansätze der statistischen Theorie im allgemeinen an die Annahme an, es gelte in unserer Welt ein eigentümliches Gesetz, das zum Ausdruck komme in der „Erfahrungstatsache, daß bei gewissen Erscheinungsreihen die relative Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses sich bei unbeschränkt fortgesetzter Beobachtung einem bestimmten Grenzwert nähert" (v. Mises [Wahrscheinlichkeit], S. 91). — Aus den vorstehenden Überlegungen ergibt sich nun, daß dieses „Gesetz der großen Zahlen", das gelegentlich auch in anderen Formulierungen auftritt (cf. z. B. Zilsel [Anwendungsproblem]), seiner logischen Eigenart nach keineswegs mit den sonstigen Gesetzen der empirischen Wissenschaften in Parallele zu setzen ist, da es seines transfiniten Charakters wegen zu keiner nachprüfbaren Konsequenz führt. Das „Gesetz der großen Zahlen" stellt also — wenigstens in der zitierten Formulierung — einen Scheinsatz dar und kann nicht als Ergebnis empirischer Feststellungen bezeichnet werden.

Endlich ergibt sich aus den Überlegungen unter (I), daß die Geltung aller Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie für ein physikalisches Kollektiv im Sinne der v. Misesschen Theorie selbstverständlich ist; denn ein solches erfüllt definitionsgemäß jene Bedingungen, aus denen sämtliche Sätze der Theorie analytisch folgen. Der physikalische Gehalt der Theorie ist also in die Zuordnungsdefinition gelegt, statt in die Axiome: Um auf Grund der Zuordnungsdefinition gewiß sein zu können, daß eine statistische Reihe physikalischer Daten ein Kollektiv

bestimme, daß man also die Wahrscheinlichkeitstheorie auf sie anwenden dürfe, muß man über die Reihe mindestens ebensoviel wissen, wie nachträglich die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung über sie auszusagen gestatten. Etwas vergröbert ließe sich also die Zuordnungsdefinition so aussprechen: Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist auf solche Gebilde anzuwenden, die den Axiomen der Wahrscheinlichkeitstheorie genügen. — Freilich entsteht nun kein Geltungsproblem für die Wahrscheinlichkeitsrechnung mehr, aber die Theorie ermöglicht auch nicht die Aufstellung nicht-analytischer physikalischer Sätze. So zeigt die Erörterung des Problems der physikalischen Deutung die bereits in (I) (S. 24 f.) aufgewiesene Schwierigkeit in einem neuen Aspekt.

Zur Verdeutlichung der Sachlage sei daran erinnert, daß etwa im Falle der Geometrie der Übergang von der axiomatisierten „formalen" zur „physikalischen" Disziplin durch gewisse „Zuordnungsdefinitionen" (H. Reichenbach [Relat. Ax.], [Raum-Zeit-Lehre]) vermittelt wird, die die Grundbegriffe des Axiomensystems physikalisch deuten. Diese Zuordnungsdefinitionen legen nun die Bedingungen dafür, daß ein physikalisches Gebilde einen „physikalischen Punkt", eine „physikalische Gerade" oder dgl. darstellt, so fest, daß dabei nicht darauf Bezug genommen wird, ob die betreffenden physikalischen Gebilde den Axiomen einer bestimmten formalen (etwa der Euklidischen) Geometrie genügen. So führen sie die Formeln der reinen Geometrie in physikalische Sätze über, die nicht sämtlich analytisch sind, und die daher empirisch auf ihre Geltung geprüft werden können. (Daß hier die Zuordnungsdefinitionen nicht auf die Geltung der Axiome Bezug nehmen, zeigt sich auch daran, daß man mittels derselben Zuordnungsdefinitionen die Axiome sowohl der Euklidischen wie gewisser Nicht-Euklidischer Geometrien physikalisch interpretieren kann.)

Der hier entwickelte Einwand gilt allgemein für jede Wahrscheinlichkeitstheorie, die die Wahrscheinlichkeit als Limesbegriff einführt und gleichzeitig in der Deutungsvorschrift die Existenz eines Limes voraussetzt; denn unabhängig davon, ob in der Theorie neben der Voraussetzung der Konvergenz der betrachteten Folgen noch weitere Voraussetzungen gemacht werden oder nicht, geht jedenfalls ein Teil der Theorie, die ausschließlich in den Axiomen zu formulieren wäre, in die Zuordnungsdefinition ein.

Aus dem Vorstehenden ergeben sich zwei Hauptaufgaben für eine logisch befriedigende Ausgestaltung der empiristischen Theorie der Wahrscheinlichkeit:

(I.) Formalisierung der gesamten physikalischen Wahrscheinlichkeitstheorie in einer Axiomatik, die auch den oben unter (I) entwickelten Bedingungen genügt.

(II.) Aufstellung finiter Vorschriften für die physikalische Deutung der Grundbegriffe dieser Axiomatik; dabei ist in die Zuordnungsdefinitionen nicht die Voraussetzung aufzunehmen, daß die durch sie zu kennzeichnenden physikalischen Gebilde die in den Axiomen formulierten Eigenschaften besitzen.

Anhang:

Über die Wahrscheinlichkeit von Einzelfällen.

Von den Vertretern einer aprioristisch-logischen Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (z. B. von J. v. Kries [Prinzipien] und in neuerer Zeit von J. M. Keynes [Probability]) wird gegen die statistische Theorie häufig der Vorwurf erhoben, daß sie vom Wert einer Wahrscheinlichkeit nur mit Bezug auf ein bestimmtes statistisches Material (Kollektiv) zu sprechen gestatte; es gebe aber zahlreiche Fälle, in denen augenscheinlich mit Sinn von der Wahrscheinlichkeit eines Einzelfalls die Rede sei; von diesem wichtigen Gebiet wahrscheinlichkeitstheoretischer Betrachtungen vermöge die statistische Theorie keine Rechenschaft abzulegen. Dieser Einwand soll hier näher untersucht werden, weil seine Erörterung geeignet erscheint, die logische Eigenart der statistischen Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs noch genauer zu bestimmen.

Es ist hier zunächst darauf hinzuweisen, daß die Vertreter dieses Einwandes gar nicht angeben, welchen empirischen Sinn die Rede von der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses eigentlich haben soll: sie machen kein einziges Verfahren namhaft, das die empirische Nachprüfung einer Aussage über die Wahrscheinlichkeit eines Einzelfalles gestatten würde; und es ist auch nicht recht ersichtlich, welche Möglichkeiten der Nachprüfung einer Wahrscheinlichkeitsaussage sich eröffnen sollten, wenn man sich konsequent jeweils auf die Betrachtung eines Einzelfalles beschränken würde; denn hier kann die Beobachtung immer nur zu einem der beiden Ergebnisse führen: „Der Fall ist eingetreten" bzw. „Der Fall ist nicht eingetreten."

Die statistische Theorie dagegen sucht den Sinn der Wahrscheinlichkeitsaussagen so zu präzisieren, wie es ihrem wissenschaftlichen Gebrauch entspricht; und im wissenschaftlichen Gebrauch werden die Wahrscheinlichkeitsaussagen jedenfalls im wesentlichen im Sinne der statistischen Theorie geprüft, d. h. als Aussagen über statistische Eigenschaften physikalischer Gesamtheiten.

Ferner ist zu berücksichtigen, daß der Begriff des Einzelfalles gewisse rein logische Schwierigkeiten in sich birgt. Ein „Einzelfall" kann nämlich lediglich durch die Angabe seiner raumzeitlichen Koordinaten eindeutig festgelegt werden, nicht aber durch eine noch so sehr ins Einzelne gehende Charakterisierung seiner physikalischen Eigenschaften. In der Tat: Die Angabe noch so vieler physikalischer Einzelheiten — im günstigsten Falle der Wertverteilung sämtlicher Zustandsgrößen — legt ja nicht einen „Einzelfall" fest, sondern die Klasse derjenigen Fälle, die jene physikalischen Eigenschaften besitzen. (Dabei kommt es für unsere Frage offenbar nicht darauf an, ob in der Erfahrung tatsächlich mehrere Fälle auftreten, die in allen ins Auge gefaßten Eigenschaften übereinstimmen; hier handelt es sich vielmehr ausschließlich darum, daß das Vorkommen mehrerer, in den betrachteten Eigenschaften völlig übereinstimmender Fälle weder logisch noch physikalisch — soviel

man heute weiß — unmöglich ist, und daß man daher durch die Angabe noch so vieler physikalischer Einzelheiten einen Einzelfall niemals endgültig festlegen kann.) Die Angabe der raumzeitlichen Koordinaten aber, die eine eindeutige Kennzeichnung eines Einzelfalles ermöglicht, gestattet offenbar von sich aus noch keinen Wahrscheinlichkeitsansatz, denn selbst den aprioristischen Theorien zufolge knüpft der Wahrscheinlichkeitsansatz stets an gewisse physikalische Angaben an, die nicht, wie die räumlichen und zeitlichen Koordinaten, die Eigentümlichkeit besitzen, nur implizite in die Formulierung der Naturgesetze einzugehen.

So führt auch die Analyse dieses Punktes fast zwangsläufig zu dem Ergebnis, daß die Wahrscheinlichkeitsaussagen über K l a s s e n von Fällen sprechen (logistisch präziser: daß sie als Beziehungen zwischen Satzfunktionen zu formulieren sein werden), und weist damit jedenfalls in die Richtung, in der auch die Ansätze der statistischen Theorie die Lösung des Problems suchen. (Vgl. hierzu besonders den folgenden Paragraphen.)

Im Zusammenhang mit der Frage der Erkennbarkeit von Einzelfällen oder mit verwandten Problemen ist gerade auch in neueren logischen Untersuchungen (Z i l s e l [Anwendungsproblem]; K a i l a [Ausgleich des Zufalls]; K e y n e s [Wahrscheinlichkeit]) der Gedanke entwickelt worden, daß die Welt möglicherweise „bodenlos" (K a i l a) sei, und daß daher unsere Wirklichkeitserkenntnis niemals zu einem Ende kommen könne. Hinsichtlich der Möglichkeit der physikalischen Charakterisierung eines Einzelfalles würde dies besagen, daß bereits zur Festlegung eines einzelnen Falles unendlich viele „Determinanten" (K a i l a) erforderlich seien, und daß daher auch aus diesem Grunde eine endgültige Festlegung eines Einzelfalles nicht möglich sei. Dieser Gedanke ist indessen logisch wohl kaum haltbar, und deshalb wurde er eben bei der Erörterung der logischen Schwierigkeiten, die dem Begriff des Einzelfalles anhaften, nicht ins Treffen geführt.

Die angedeuteten Erwägungen stellen nämlich, wie mir scheint, eine metaphysische Verabsolutierung der Tatsache dar, daß die im Zuge der empirischen Erkenntnis entwickelten begrifflichen Hilfsmittel der Wissenschaft nötigenfalls in Anpassung an das sich ständig erweiternde Erfahrungsmaterial abgeändert werden; daß die Wissenschaft grundsätzlich immer wieder bereit ist, ihre Begriffe und Sätze zu modifizieren oder nötigenfalls in größerem Umfange aufzugeben und durch neue zu ersetzen; ein charakteristisches Beispiel für diese methodische Haltung, das gerade die erwähnten Betrachtungen über die „Tiefe der Welt" besonders beeinflußt haben mag, stellt das Verfahren der Physik dar, gegebenenfalls durch Einführung weiterer Zustandsgrößen neue Erfahrungsbefunde dem System der wissenschaftlichen Erkenntnis einzugliedern. Die Frage nach der restlosen Erfaßbarkeit eines Einzelfalles wäre also genauer als ein Problem der Form der wissenschaftlichen Sprache zu fassen, etwa als die Frage nach den Formen der Gegenstandsbeschreibung in der gegenwärtigen Physik. — Andererseits kann auch die Frage nach dem Charakter der Wahrscheinlichkeitsaussagen jeweils nur im Rahmen einer bestimmten wissenschaftlichen Sprache untersucht werden; und wenn man in diesem Sinne das Problem der „Wahrscheinlichkeitsaussagen über Einzelfälle" in den „syntaktischen" Problemkreis rückt, dann dürften die zuletzt erörterten Schwierigkeiten fortfallen. (Nähere Angaben über die von C a r n a p ausgebildete „syntaktische" Untersuchung einer Wissenschaft und Anwendungen auf die syntaktische Untersuchung des Wahrscheinlichkeitsproblems finden sich in Kapitel III.)

Über die Frage der Deutung von Aussagen über die Wahrscheinlichkeit eines Einzelfalles im Rahmen der statistischen Theorie sei schließlich folgen-

des bemerkt: Die statistische Theorie kann Wahrscheinlichkeiten zunächst nur mit Bezug auf ein fest vorgegebenes Kollektiv einführen, und deswegen bezeichnet es v. Mises mit allem Nachdruck als sinnlos, überhaupt von der Wahrscheinlichkeit eines Einzelfalles zu sprechen. Beispielsweise habe es keinen Sinn, nach der Wahrscheinlichkeit dafür zu fragen, daß ein bestimmter vierzigjähriger Mann im Laufe des nächsten Jahres sterben werde. Denn dieser Mann gehöre ebensowohl zu dem Kollektiv aller vierzigjährigen Menschen überhaupt wie zu dem, das nur die vierzigjährigen Männer enthält. Im ersteren aber sei die relative Häufigkeit der Sterbefälle der betrachteten Art etwas geringer als im zweiten. Nach dem wahren Wert der Sterbenswahrscheinlichkeit für jenen Mann zu fragen, sei also vom Standpunkt der statistischen Theorie aus sinnlos. Hierin wird man v. Mises zweifellos zustimmen müssen. Andererseits hat man in sehr vielen der Fälle, in denen von der Wahrscheinlichkeit eines Einzelereignisses die Rede ist, durchaus den Eindruck, daß hier eine sinnvolle, wenn auch vielleicht unklar formulierte Fragestellung vorliege, und es entsteht daher die Aufgabe, den Sinn derartiger auf Einzelfälle bezüglicher Wahrscheinlichkeitsaussagen zu präzisieren. Es zeigt sich, daß im allgemeinen bei der Erörterung der Wahrscheinlichkeit von Einzelfällen jeweils ein bestimmtes Kollektiv gleichsam als „das selbstverständliche Bezugskollektiv" gemeint wird, und daß daher die der Formulierung nach von Einzelfällen handelnden Wahrscheinlichkeitsaussagen ebenfalls eine statistische Deutung zulassen. So liegt es z. B., wenn ein Spieler von der Wahrscheinlichkeit spricht, beim nächsten Wurf mit einem Würfel eine 5 zu werfen: sein Wahrscheinlichkeitsansatz bezieht sich unausgesprochen auf das „selbstverständliche" Kollektiv, das aus den Würfen mit diesem Würfel besteht. Gewiß mag dies nicht in jedem Falle bewußt werden, jedenfalls aber läßt in vielen Fällen die Rede von der Wahrscheinlichkeit eines Einzelfalles ungezwungen eine derartige, auch im Rahmen der statistischen Theorie sinnvolle Interpretation zu. Entsprechendes gilt z. B. für die Frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß auf mein Los bei der nächsten Lotterieziehung der Hauptgewinn entfallen werde, und für viele andere Fälle.

Etwas komplizierter ist das Resultat, wenn man Beispiele wie das von R. v. Mises angegebene untersucht. Indessen zeigt es sich, daß auch in solchen Fällen meistens eine vernünftige Erwägung hinter der mißverständlich formulierten Begriffsbildung steht. Im Falle des erwähnten vierzigjährigen Mannes z. B. könnte man die Sterbenswahrscheinlichkeit dadurch genauer abzuschätzen suchen, daß man möglichst viele wesentliche Einzelangaben über jenen Vierzigjährigen berücksichtigt, wie etwa die, daß es sich um einen Mann von dem und dem Gesundheitszustand handelt, der als Arbeiter in einem bestimmten Zweige der chemischen Industrie tätig ist, und zwar in einer Fabrik, die bei der Einrichtung des Arbeitsganges in dem und dem Maße auf hygienische Forderungen Rücksicht nimmt usw. In der exakteren Formulierung der statistischen Theorie würde das bedeuten, daß man den betrachteten Einzelfall in eine gewisse spezielle Klasse (Kollektiv) einordnet, die den Durchschnitt gewisser umfassenderer Klassen bildet, denen der Einzelfall ebenfalls angehört. Diese Durchschnittsklasse legt ebenso wieder eine gewisse relative Häufigkeit der Sterbefälle im 41. Lebensjahre fest wie die umfassenderen Klassen. Je mehr Eigenschaften des bestimmten betrachteten Mannes man nun zur Festlegung der „Durchschnittsklasse" herangezogen hat, desto genauer wird man mit der zu dieser Klasse gehörigen relativen Häufigkeit die „wahre Sterbenswahrscheinlichkeit dieses Mannes" bestimmt haben — dies etwa ist wohl der Gedanke, der in Fällen wie dem eben betrachteten der Begriffsbildung „Wahrscheinlichkeit eines Einzelfalles" zu-

grunde liegt. Diese Erwägung ist auch im Rahmen der statistischen Theorie zulässig; denn offenbar besteht rein logisch kein Unterschied zwischen den umfassenden Kollektivs der vierzigjährigen Menschen oder der vierzigjährigen Männer einerseits und der erwähnten Durchschnittsklasse andererseits. (Wohl aber besteht ein Unterschied insofern, als es empirisch immer schwieriger wird, „ausreichendes" statistisches Material für die Bestimmung der fraglichen relativen Häufigkeiten zu gewinnen.)

Diese — in ähnlicher Weise schon von Reichenbach ([Axiomatik], S. 571) angestellte Überlegung dürfte zeigen, daß man der Rede von der Wahrscheinlichkeit eines Einzelfalles auch im Rahmen der statistischen Theorie einen Sinn beilegen kann. Man hätte danach die Deutung von Aussagen über die Wahrscheinlichkeit von Einzelfällen an eine Einordnung des Einzelfalles in immer speziellere Klassen anzuschließen. Es zeigt sich dabei freilich, daß mit der Vermehrung der Bestimmungen des Einzelfalles das zugehörige statistische Material abnimmt, und daß insofern die Wahrscheinlichkeitsbestimmung immer ungenauer wird. Um eine „exakte" Bestimmung kann es sich hier also nicht handeln. Aber man beachte, daß zwischen denjenigen Wahrscheinlichkeiten, die den umfassenderen Ausgangsklassen zugeordnet sind, und denen, die den engeren Durchschnittsklassen entsprechen, kein prinzipieller, sondern nur ein gradueller Unterschied besteht: man ist ja bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten grundsätzlich immer auf endliches empirisches Material angewiesen.

Man könnte nun versucht sein, in Fortsetzung der eben ausgeführten Überlegung zu behaupten, daß die Wahrscheinlichkeit eines Einzelfalles dadurch gefunden werde, daß dieser Einzelfall in immer engere Kollektivs eingeordnet und zu jedem dieser Kollektivs die entsprechende Wahrscheinlichkeit als Limes der relativen Häufigkeit ermittelt werde. Die so ermittelten Wahrscheinlichkeiten würden dann selbst gegen einen Grenzwert konvergieren, der nun als Wahrscheinlichkeit des Einzelfalles anzusehen sei.

Indessen scheint mir diese Auffassung gerade für die Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der empirischen Wissenschaft nicht durchführbar zu sein. Stößt schon die Limesdeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs der statistischen Theorie auf logische Schwierigkeiten, so gilt dies in erhöhtem Maße für die Einführung der eben angedeuteten Begriffsbestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Einzelfalles. Erschwerend wirkt noch die Einbeziehung des Gedankens, die „Eigenschaften eines Einzelfalles" durch eine unendliche Folge von Angaben festlegen zu wollen; über die hiermit zusammenhängenden Probleme sind weiter oben einige Bemerkungen gemacht worden.

Insgesamt wird man sagen dürfen, daß die statistische Wahrscheinlichkeitstheorie die sogenannten Aussagen über die Wahrscheinlichkeit von Einzelfällen so weit angemessen zu deuten gestattet, wie sie überhaupt einen empirischen Sinn besitzen; damit aber genügt sie allen Ansprüchen, die überhaupt an eine wissenschaftliche Theorie der Wahrscheinlichkeit gestellt werden können.

§ 3. Bemerkungen zu H. Reichenbachs axiomatischer Theorie der Wahrscheinlichkeit.

Die Klärung der beiden Probleme, auf die uns die im vorigen Paragraphen durchgeführte Analyse der v. Misesschen Theorie geführt hat, ist neuerdings durch die Untersuchungen von H. Reichenbach, besonders durch dessen „Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung" in bedeutsamer Weise gefördert worden. (Bez. der Einzelheiten dieser Arbeit, auf die wir mehrfach zurückkommen werden, müssen wir uns hier mit dem Hinweis auf die Originalabhandlung begnügen.) Im folgenden wird versucht, die Bedeutung der Reichenbachschen Untersuchungen für die im vorigen Kapitel umrissenen Fragenkreise kurz zu kennzeichnen.

(I.) Reichenbach gibt in seiner Theorie eine den obenerwähnten Ansprüchen genügende Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es wird dabei genau ein Grundbegriff eingeführt, der Begriff der Wahrscheinlichkeitsimplikation; er kann nicht auf rein mathematische oder logische Begriffe zurückgeführt werden. Dieser Begriff ist der charakteristische Bestandteil jeder Wahrscheinlichkeitsaussage; dies wird auch in der formalen Darstellung der Wahrscheinlichkeitsaussagen zum Ausdruck gebracht; jede Wahrscheinlichkeitsaussage hat in Reichenbachs Theorie die Form:

$$(1) \qquad (i)\ (x_i \varepsilon O \underset{p}{\rightarrow} y_i \varepsilon P)$$

Daneben werden die beiden Schreibweisen

$$(2) \qquad O \underset{p}{\rightarrow} P \qquad \text{und}$$

$$(3) \qquad W(O, P) = p$$

als gleichbedeutende Abkürzungen eingeführt.

In (1) bezeichnen x_i, y_i die Glieder zweier umkehrbar eindeutig aufeinander bezogener abzählbar unendlicher ($i = 1, 2, 3, \ldots$) Mengen; O und P variable Klassen, die die x_i bzw. y_i als Elemente enthalten können, und $\underset{p}{\rightarrow}$ das Grundzeichen der Wahrscheinlichkeitsimplikation vom Grade p.

Bei der Formulierung der Axiome verwendet Reichenbach ausschließlich die Schreibweise (2), so daß man das Axiomensystem als die formale Theorie einer Relation „Wahrscheinlichkeitsimplikation vom Grade p" bezeichnen kann (wobei p variabel zu denken ist), deren

Feld aus gewissen Klassen P, Q, ... besteht. Eine etwaige Vorschrift zur physikalischen Deutung des Axiomensystems wird sich daher außer auf das Zeichen $\underset{p}{\Rightarrow}$ auch auf die Klassenzeichen P, Q, ... beziehen müssen.

Stellt dieser Ansatz im wesentlichen eine logistisch präzisierte Ausgestaltung des v. Misesschen Gedankens dar, daß der Begriff der Wahrscheinlichkeit nur mit Bezug auf ein Kollektiv definiert werden könne, so liegt nun der in unserem Zusammenhang besonders interessierende Fortschritt der Reichenbachschen Theorie darin, daß im Rahmen der formalen Theorie, insbesondere bei der Ableitung der Sätze aus den Axiomen, auf die Möglichkeit einer mathematischen oder physikalischen Deutung des Systems, etwa im Sinne der statistischen Theorie, in keiner Weise Bezug genommen wird: „Wir lassen es also zunächst ganz offen, was mit dem Bestehen der Wahrscheinlichkeitsimplikation und insbesondere der Angabe eines Wahrscheinlichkeitsgrades gemeint ist. Wir stellen vielmehr zunächst nur das System der Gesetze der Wahrscheinlichkeitsimplikation auf; die so entwickelte Wahrscheinlichkeitsrechnung nennen wir formale Wahrscheinlichkeitsrechnung." (Reichenbach [Axiomatik], S. 576).

Es sollen nun die von Reichenbach aufgestellten Axiome angegeben werden, da wir an späterer Stelle ohnedies ausdrücklich auf die Gestalt der Formeln werden Bezug nehmen müssen.

I. Eindeutigkeit:

$$(p \neq q) \supset \left[(O \underset{p}{\Rightarrow} P) \,.\, (O \underset{q}{\Rightarrow} P) \equiv (\overline{O})\right]$$

II. Normierung:

1. $(O \supset P) \supset (O \underset{p}{\Rightarrow} P) \,.\, (p = 1)$
2. $(O \underset{p}{\Rightarrow} P) \supset (p \geqq O)$

III. Additionstheorem:

1. $(O \underset{p}{\Rightarrow} P) \,.\, (O \underset{q}{\Rightarrow} Q) \,.\, (O \,.\, P \supset \overline{Q}) \supset (O \underset{r}{\Rightarrow} P \vee Q) \,.\, (r = p+q)$
2. $(O \underset{p}{\Rightarrow} P) \,.\, (O \underset{r}{\Rightarrow} P \vee Q) \,.\, (O \,.\, P \supset \overline{Q}) \supset (O \Rightarrow Q)$ [4])

---

4) Das hier auftretende Zeichen der „unbestimmten Wahrscheinlichkeitsimplikation" stellt ein Kurzzeichen dar, das durch folgende Definition eingeführt wird:

$$(O \Rightarrow P) = {}_{Df} (\exists z) \,.\, (O \underset{z}{\Rightarrow} P) = {}_{Df} (\exists z)\ (i)\ (x_i \varepsilon O \underset{z}{\Rightarrow} y_i \varepsilon P)$$

IV. Multiplikationstheorem:

$$1.\ (O \underset{p}{\Rightarrow} P) . (O . P \underset{u}{\Rightarrow} Q) \supset (O \underset{w}{\Rightarrow} P . Q) . (w = p . u)$$

$$2.\ (O \underset{p}{\Rightarrow} P) . (O \underset{w}{\Rightarrow} P . Q) \supset (O . P \Rightarrow Q)$$

$$3.\ (O . P \underset{u}{\Rightarrow} Q) . (O \underset{w}{\Rightarrow} P . Q) \supset (O \Rightarrow P)$$

Zu diesen Axiomen, die wir zur Abgrenzung gegen einige von Reichenbach in derselben Arbeit untersuchte Spezialisierungen als das Axiomensystem der „allgemeinen normalen Wahrscheinlichkeitsrechnung" bezeichnen wollen, treten noch die Axiome des Satzkalküls und des engeren Funktionenkalküls nach Hilbert-Ackermann ([Logik]).

Aus diesem System von Ausgangsformeln wird nun eine Reihe von Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung formal deduziert; auf diese Ableitungen brauchen wir indessen im vorliegenden Zusammenhange nicht näher einzugehen.

Sehr wesentlich für die Klärung der uns hier beschäftigenden Fragen ist indessen die von Reichenbach aufgewiesene Tatsache, daß das angegebene Axiomensystem der allgemeinen formalen Wahrscheinlichkeitsrechnung ein „arithmetisches Modell" besitzt, das mit demjenigen Teil der statistischen Wahrscheinlichkeitsrechnung als mathematischer Theorie übereinstimmt, dessen Sätze ausschließlich die Konvergenz der untersuchten Folgen voraussetzen (dagegen nicht noch weitergehende Eigenschaften im Sinne des Regellosigkeitsaxioms; das sogleich näher zu kennzeichnende arithmetische Modell umfaßt daher nur einen Teil der Sätze der v. Misesschen Wahrscheinlichkeitstheorie).

Reichenbach führt die arithmetische Deutung folgendermaßen ein:

> „Wir verstehen unter $\overset{n}{\underset{1}{N}}_i (x_i \varepsilon A)$ die Anzahl derjenigen x_i zwischen $i = 1$ und $i = n$, welche der Klasse A angehören. Das Zeichen N ist entsprechend zu verstehen in Ausdrücken der Form $\overset{n}{\underset{1}{N}}_i (x_i \varepsilon A)(y_i \varepsilon B)$, wo es die Zahl der Paare x_i, y_i bezeichnet, die der hingeschriebenen Bedingung genügen, und ebenso in ähnlichen Ausdrücken. Unter $H_n (O, P)$ verstehen wir den Ausdruck

$$H_n(O, P) = \frac{\sum_{1}^{n} N_i(x_i \varepsilon O)\ (y_i \varepsilon P)}{\sum_{1}^{n} N_i(x_i \varepsilon O)}$$

der entsprechend auch für kompliziertere Fälle zu verstehen ist derart, daß die vor dem Komma in H_n (O, P) stehenden Zeichen den Nenner des Bruches bestimmen, während im Zähler alle Zeichen auftreten. Wir geben nun die Häufigkeitsdeutung durch folgende Vorschrift:

Zuordnungsdefinition α:

Unter $(O \underset{p}{\rightarrow} P)$ soll die Aussage verstanden werden, daß die Folgen x_i und y_i für die Häufigkeit H_n (O, P) einen limes besitzen, der gleich p ist. In Zeichen

$$W(O, P) = \lim_{n = \infty} H_n(O, P).$$

Diese Häufigkeitsdeutung durch einen Limes entspricht der durch Herrn v. Mises gegebenen Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Jedoch unterscheidet sich unsere Häufigkeitsdeutung dadurch, daß wir eine Regellosigkeitsforderung nicht aufstellen. ... Infolgedessen können unsere Wahrscheinlichkeitsfolgen durch Vorschriften gegeben werden. Z. B. ist die Folge

$$p\ \bar{p}\ p\ \bar{p}\ p\ \bar{p} \cdots$$

eine Wahrscheinlichkeitsfolge in dem von uns definierten Sinne. ... Wir müssen die Angebbarkeit der Folge durch eine Vorschrift hier verlangen, weil wir eine mathematische Häufigkeitsdeutung entwickeln, und eine unendliche mathematische Folge nicht anders als durch eine Vorschrift gegeben werden kann. Wir nennen den dabei entstehenden Wahrscheinlichkeitsbegriff, also den durch das Axiomensystem einschließlich der Zuordnungsdefinition α bestimmten Begriff, den inhaltlichen mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, im Gegensatz zu dem formalen mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, der durch das Axiomensystem allein definiert wird, also ohne eine inhaltliche Belegung." (Reichenbach, a. a. O., S. 591/92.)

Reichenbach zeigt dann, daß bei Zugrundelegung dieser Deutung sämtliche Axiome in analytische arithmetische Sätze übergehen — man kann dies unschwer nachprüfen —, daß also die statistische Wahrscheinlichkeitstheorie, soweit sie sich lediglich auf die Voraussetzung der Konvergenz der betrachteten Reihen stützt, ein arithmetisches Modell der Axiome der allgemeinen formalen Wahrscheinlichkeitsrechnung darstellt in demselben Sinne, wie die analytische Geometrie des Euklidischen Raumes ein arithmetisches Modell der formalen Euklidischen Geometrie bildet.

(II.) Um zu einer eigentlich physikalischen Deutung seines Axiomensystems zu gelangen, bedient sich Reichenbach der oben zitierten „Zuordnungsdefinition α" mit dem Zusatz, daß die in dieser Definition genannten Folgen nicht mathematisch gegeben, sondern „naturgegeben" sein sollen, also Folgen von der Art, „wie sie etwa bei der Wiederholung physikalischer Vorgänge oder bei der gleichzeitigen Realisation von Zuständen in einer großen Menge von Exemplaren auftreten". (Reichenbach, a. a. O., S. 610.)

Die Wahl dieser Zuordnungsdefinition hat freilich die in § 2 bei der Untersuchung der v. Misesschen Theorie aufgewiesenen Schwierigkeiten im Gefolge: wegen des transfiniten Charakters der Deutungsvorschrift kann für keine physikalische Beobachtungsfolge darüber entschieden werden, ob sie ein Kollektiv bildet oder nicht. Reichenbach setzt sich mit diesem Problem eingehend auseinander. Er hält eine Behebung der Schwierigkeit für ausgeschlossen, falls nur solche Behauptungen als sinnvoll anerkannt werden, die prinzipiell endgültig als wahr oder falsch entschieden werden können. Er vollzieht deshalb den Übergang von dieser Auffassung der „strengen Logik" zu derjenigen einer „Wahrscheinlichkeitslogik": „Die zwei Wahrheitswerte der strengen Logik werden hier durch eine stetige Wahrheitsskala ersetzt, eben die der Wahrscheinlichkeit, derart, daß Wahrheit und Falschheit nur die Grenzfälle der Wahrscheinlichkeitsskala bedeuten. ... Innerhalb der Wahrscheinlichkeitslogik werden die Wahrscheinlichkeitsaussagen entscheidbar. Zwar sind sie auch hier nicht als wahr entscheidbar, aber sie sind als wahrscheinlich entscheidbar; das ist für die Wahrscheinlichkeitslogik sinnvoll und hinreichend." (Reichenbach, a. a. O., S. 612.)

Von dieser Basis aus greift Reichenbach nun das durch den transfiniten Charakter seiner Zuordnungsdefinition gegebene Problem auf Grund folgender Erwägung an: Die Entscheidung darüber, ob eine vorgelegte Reihe physikalischer Beobachtungen Limescharakter besitzt oder nicht, kann nicht Sache empirischer Feststellung, sondern muß Sache einer axiomatischen Festsetzung sein. Zur Sicherung der Anwendbarkeit jener Zuordnungsdefinition ist daher die Einführung eines besonderen Axioms erforderlich, des „Axioms der Induktion"; es wird in folgender Weise eingeführt:

> „Um dieses Axiom formulieren zu können, führen wir den Begriff der Häufigkeitsgröße ein. Wir verstehen darunter eine Größe, die entweder eine relative Häufigkeit (im Sinne der in der „Zuordnungsdefinition α" auftretende Begriffsbildung; d. Vf.) ... ist, oder die Summe oder Differenz zweier derartiger Größen oder der Limes einer Folge derartiger Größen, oder auch eine Größe, die durch mehrfach wiederholte Anwendung der genannten Operationen in beliebiger Reihenfolge aus relativen Häufigkeiten entsteht. Das gesuchte Anwendungsaxiom lautet nun:

Axiom der Induktion: Wenn eine physikalische Vorschrift eine beliebig verlängerbare Folge von Häufigkeitsgrößen h_i bestimmt, von denen bereits $h_1 \ldots h_n$ ermittelt vorliegen, und wenn s_1 und s_2 Zahlen sind derart, daß von einem Glied h_m $(1 \leqq m \leqq n)$ ab alle h_i $(m \leqq i \leqq n)$ zwischen den Schranken s_1 und s_2 liegen, so besteht eine Wahrscheinlichkeit w dafür, daß die Folge einem Limes zwischen s_1 und s_2 zustrebt; w wächst gegen 1, wenn n—m nach unendlich geht und dabei alle h_i $(m \leqq i \leqq n)$ zwischen diesen Schranken bleiben." (Reichenbach, a. a. O., S. 614.)

Damit ist die von Reichenbach in der erwähnten Arbeit entwickelte physikalische Deutung der Wahrscheinlichkeitstheorie in ihren Grundzügen beschrieben. In neueren, noch unveröffentlichten Untersuchungen hat Reichenbach, wie ich einer freundlichen persönlichen Mitteilung entnehme, die zuletzt skizzierte logisch-erkenntnistheoretische Grundlegung seiner Theorie — unter Beibehaltung des transfiniten Charakters der physikalischen Wahrscheinlichkeiten — in einigen Punkten wesentlich verändert und dabei insbesondere auf die Einführung eines Induktionsaxioms verzichtet (eine kurze zusammenfassende Darstellung seiner neuen Auffassung gibt der Aufsatz [Log. Grundl.]); indessen besitzen die vorstehend geschilderten Überlegungen, die Reichenbach in seiner Arbeit [Axiomatik] entwickelt hat, im Rahmen der Bemühungen um eine logische Klärung der Wahrscheinlichkeitsaussagen doch großes logisch-methodologisches Interesse, und es mögen deshalb im folgenden einige Erwägungen allgemeinerer Art an sie angeschlossen werden.

1. Da in die Vorschrift zur physikalischen Deutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung die „Zuordnungsdefinition α" eingeht, die von einem Kollektiv die Konvergenz der betrachteten relativen Häufigkeiten fordert, und da für konvergente Folgen die entsprechend interpretierten Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung analytisch sind, dürfte auch der Reichenbachschen Theorie gegenüber eines der Bedenken bestehen bleiben, das oben gegenüber der Thorie von R. v. Mises in zwei verschiedenen Formen entwickelt wurde: es wird nämlich der Gehalt der Theorie in die Zuordnungsdefinition verlegt: um auf eine Reihe physikalischer Daten die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden zu dürfen, muß man sicher sein, daß die Reihe den Bedingungen der Zuordnungsdefinition genügt; man muß also über die Reihe mindestens ebensoviel wissen, wie nachträglich alle Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammen über sie auszusagen gestatten. Und da ferner die Formeln der Theorie bei dieser Wahl der Zuordnungsdefinition sämtlich in Tautologien übergehen, so wird bei dieser Deutung die gesamte physikalische Wahrscheinlichkeitstheorie gehaltleer.

2. Zur Behebung dieser Schwierigkeiten soll das Induktionsaxiom dienen. Seine Bedeutung läßt sich ungefähr dahingehend kennzeichnen, daß es gestattet, schon beim Vorliegen endlicher Reihen von Häufigkeitszahlen die Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuwenden. So notwendig nun die finitisierende Tendenz erscheint, die in der Aufstellung dieses Axioms zum Ausdruck kommt, so stehen dem hier gewählten Verfahren der Finitisierung doch gewisse Bedenken entgegen.

Das Induktionsaxiom erhebt nämlich seiner Formulierung nach Anspruch auf empirische Geltung, es wird also in eine gewisse Analogie zu den Naturgesetzen gebracht. Dem liegt der Gedanke zugrunde, daß mit der Geltung dieses einen Gesetzes zugleich die Geltung der gesamten allgemeinen Wahrscheinlichkeitsrechnung in physikalischer Deutung gesichert sei: „Das Geltungsproblem der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung reduziert sich deshalb auf das Problem der Geltung des Induktionsaxioms“ (Reichenbach, a. a. O., S. 618). — Es erscheint aber aus logischen Gründen als bedenklich, wenn ein Gesetz, von dessen „Geltungsproblem“ hier ausdrücklich die Rede ist, durch eine „über das Feststellbare hinausgehende axiomatische Forderung“ eingeführt wird. Freilich zeigt sich auch, daß das Induktionsaxiom nicht eigentlich ein Naturgesetz ist, da eben wegen seines transfiniten, über das Feststellbare hinausgehenden Charakters kein finit kontrollierbarer Satz in der Beziehung der Ableitbarkeit oder der Unverträglichkeit zu ihm stehen kann; ja daß, wie bereits oben gezeigt, nicht einmal von einer näherungsweisen Bestätigung oder Widerlegung dieses Gesetzes durch irgendeinen finiten Satz die Rede sein kann.

Überdies scheint die von Reichenbach gewählte Formulierung „zu wenig“ zu besagen, denn man überzeugt sich unschwer davon, daß sich zu jeder durch eine physikalische Vorschrift bestimmten, „beliebig verlängerbaren“ Reihe von Häufigkeitsgrößen drei natürliche Zahlen m, s_1, s_2 angeben lassen derart, daß die Bedingungen des Axioms erfüllt sind. Das Induktionsaxiom besagt demnach, daß auf jede endliche Reihe von Häufigkeitszahlen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit die Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwendbar sind. Hierin sowohl wie in dem Zusatz „mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit“ scheint mir nun eine unerwünscht weitgehende Abschwächung des Gehaltes des „Induktionsaxioms“ zu liegen.

Aus allen diesen Gründen erscheint es mir als nicht angängig, das „Induktionsaxiom“ als eine Art Naturgesetz einzuführen. Vielmehr scheint mir die einzig mögliche Interpretation des Axioms die zu sein, daß hier eine Festsetzung vorliegt; aber nicht eine solche über die quasi-empirische Konvergenz physikalischer Folgen im Falle ihrer „un-

endlichen Verlängerung", sondern eine Festsetzung über die physikalische Deutung der Formeln von der Gestalt $O \underset{p}{>} P$. Anstatt nun unter Zwischenschaltung des „Induktionsaxioms" zu sagen: Endliche Reihen physikalischer Häufigkeitszahlen haben mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit Limescharakter, und für Folgen mit Limescharakter sind die Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung analytisch, — scheint es mir der logischen Situation mehr zu entsprechen, wenn man im Sinn der Aufstellung einer Zuordnungsdefinition festsetzt: Die Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind auf endliche Reihen physikalischer Häufigkeitsgrößen anzuwenden. — Durch eine derartige Festsetzung über die physikalische Deutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung — die freilich noch einer sorgfältigen Formulierung bedarf — wird einerseits die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Theorie einer physikalischen Disziplin dargestellt und andererseits die Problematik des „Induktionsaxioms" vermieden.

Kapitel III.

Beiträge zu einer „finitistischen" Auflösung der logischen Schwierigkeiten der statistischen Wahrscheinlichkeitstheorie.

§ 1. Zur physikalischen Deutung der Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Von den beiden oben aufgewiesenen logischen Problemen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs hat, wie wir soeben zu zeigen suchten, dasjenige einer korrekten Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch die Untersuchungen von Reichenbach eine weitgehend befriedigende Lösung erfahren; dagegen ergab sich, daß das Problem der physikalischen Deutung der Wahrscheinlichkeitsaussagen — im wesentlichen wegen des transfiniten Charakters der bisherigen Deutungsvorschläge — noch gewisse Schwierigkeiten in sich birgt; um diese gruppieren sich nun die wichtigsten noch unbehobenen Probleme der empiristischen Theorie der Wahrscheinlichkeit. Im folgenden sollen einige Erwägungen dargelegt werden, die wenigstens grundsätzlich die Möglichkeit einer finitistischen Lösung des Deutungsproblems oder, in der von Reichenbach eingeführten Bezeichnungsweise, des „Sinnproblems der physikalischen Wahrscheinlichkeitsrechnung" zu eröffnen scheinen.

Diesen Darlegungen seien einige methodische Bemerkungen vorausgeschickt, die den logischen Charakter des hier zu behandelnden Problems kennzeichnen sollen.

Wenn man, wie es in der vorliegenden Arbeit versucht wird, die wissenschaftliche Erkenntnis selbst zum Objekt einer Untersuchung macht, so hat man zwei verschiedene Arten der Fragestellung sorgfältig zu unterscheiden:

a) Man untersucht einen Zweig der Wissenschaft als theoretisches Gebilde; dieser ist dann gegeben als ein System von Sätzen, die aus gewissen Elementen nach bestimmten Regeln aufgebaut sind, und zwischen denen gewisse logische Zusammenhänge bestehen. Man untersucht dann also die — als gegeben vorausgesetzten — Begriffe, Sätze, Definitionen und Schlußregeln des betreffenden Wissenschaftszweiges, und man verfolgt die logischen Beziehungen ihrer Begriffe und Sätze an Hand der erwähnten Regeln.

Diejenige wissenschaftliche Disziplin, die sich eine solche formallogische Untersuchung zur Aufgabe macht, werde als „logische Syntax

der wissenschaftlichen Sprache" bezeichnet — im Anschluß an R. Carnap, der diese Theorie bereits weitgehend aufgebaut hat.

b) Von dieser syntaktischen Problemstellung wohl zu unterscheiden ist die Aufgabe, die Gesamtwissenschaft oder einen ihrer Zweige, der Menschen eines bestimmten raumzeitlichen Bereiches zu untersuchen. Die Lösung einer solchen Aufgabe besteht nicht in der Entwicklung einer Theorie der logischen Zusammenhänge innerhalb eines vorgelegten Systems von Begriffen, Sätzen, Definitionen und Schlußregeln, sondern in der Aufstellung einer empirisch-deskriptiven Theorie des „wissenschaftlichen Verhaltens" einer durch Angabe ihres raumzeitlichen Gebietes gekennzeichneten Menschengruppe, etwa der Kulturvölker „in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts". Diese Aufgabe kann aber lediglich mit den Methoden der empirischen Wissenschaft, insbesondere mit denen der Psychologie und Soziologie, behandelt werden.

Fragen von der Art, wie sie zu Beginn dieses Paragraphen aufgeworfen wurden und im folgenden erörtert werden sollen, und ebenso eine Reihe von Fragen, die in den vorangegangenen Kapiteln behandelt worden sind, gehören nun in einer eigentümlichen Weise beiden soeben gekennzeichneten Problemgebieten gemeinsam an. Wenn etwa nach dem „Sinn" der Wahrscheinlichkeitsaussagen in der gegenwärtigen empirischen Wissenschaft gefragt wird, nach dem, was man wissenschaftlich mit einer Wahrscheinlichkeitsangabe „eigentlich meine", so wird damit die Aufgabe gestellt, die wissenschaftliche Behandlung der Wahrscheinlichkeitsaussagen „rational nachzukonstruieren" (Reichenbach), ausführlicher eine „Wissenschaft als theoretisches Gebilde", d. h. ein System von Begriffen und Sätzen samt den Regeln ihres Aufbaus und ihrer gegenseitigen Ableitungszusammenhänge aufzustellen, das in seiner Struktur möglichst eng dem Verfahren der gegenwärtigen empirischen Wissenschaften angepaßt ist und das insbesondere auch den wissenschaftlichen Methoden der Aufstellung und Bearbeitung von Wahrscheinlichkeitsaussagen Rechnung trägt.

Aus der Formulierung der Aufgabe geht bereits hervor, daß es sich hier nicht eigentlich um eine Frage handelt, deren Beantwortung dann einem Wahrheitsentscheid unterzogen werden könnte. Jede mögliche Antwort besteht vielmehr in einem Vorschlag zur Wahl der Sprache der empirischen Wissenschaft oder — wenn man speziell an die Wahrscheinlichkeitsaussagen der Physik denkt — zur Wahl der „physikalischen Sprache", und die Art der Aufgabenstellung läßt mehrere Lösungsvorschläge zu; andererseits besteht auch keine völlige Willkür für die Wahl eines Vorschlages, da die obenerwähnten Forderungen der Anpassung an das Erkenntnisverfahren der empirischen Wissenschaft erfüllt werden sollen.

Der Einwand liegt nahe, daß in der gegenwärtigen Physik ja in weitem Umfange von Wahrscheinlichkeitsaussagen Gebrauch gemacht werde, und daß daher doch bereits eine wissenschaftliche Sprache vorliegen müsse, in der auch die Wahrscheinlichkeitsaussagen und der Wahrscheinlichkeitsbegriff ihre Stelle hätten. Dies trifft aber nur bedingt zu. Während nämlich die Physik, soweit sie auf die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs verzichtet, also im wesentlichen die Physik des klassisch-deterministischen Weltbildes, nicht nur in der Umgangssprache, sondern unschwer auch in einer korrekten formalisierten Sprache mit präzis angebbarer Syntax formuliert werden kann (singuläre Sätze als Zuschreibungen von Zustandsgrößen zu Weltpunkten oder Weltgebieten; Naturgesetze als generelle Implikationen), ist die entsprechende Aufgabe für die Physik der Wahrscheinlichkeitsaussagen noch nicht vollständig gelöst. Dies geht zum Teil bereits aus den früheren Ausführungen hervor, in denen deutlich wurde, daß gerade die bedeutsamsten neueren Untersuchungen zur Erkenntnistheorie des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sich mit der sprachlich-kalkülmäßigen Präzisierung von Form und Ableitungszusammenhängen der Wahrscheinlichkeitsaussagen beschäftigen; und aus den weiter unten anzustellenden Überlegungen dürfte deutlich werden, daß die zu Beginn dieses Paragraphen gekennzeichneten offenen Probleme des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sich ebenfalls auf das formal-syntaktische Problem einer geeigneten Erweiterung und Präzisierung der physikalischen Sprache beziehen, die sich in ihrer gegenwärtigen Form angesichts der strukturellen Forderung, die die allgemeine Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in die Physik an sie stellt, in gewissen Punkten noch als lückenhaft oder zu eng erweist.

Es handelte sich für uns also vorerst um den Hinweis, daß die im folgenden zu erörternden erkenntnistheoretischen Probleme der Wahrscheinlichkeitstheorie im Grunde lediglich durch einen am Verfahren der gegenwärtigen empirischen Wissenschaft orientierten Vorschlag zur Wahl der Syntax der Wahrscheinlichkeitsaussagen ihre „Beantwortung" finden können.

2. Das Hauptproblem des vorliegenden Paragraphen betrifft die Deutung der Wahrscheinlichkeitsaussagen in der empirischen Wissenschaft, speziell in der Physik, auf die wir uns im folgenden häufig beschränken werden, da vorwiegend in dieser Disziplin die Begriffsbildung soweit präzisiert ist, daß eine logische Analyse aussichtsvoll erscheint. Vorbehaltlich einer späteren Verschärfung der Fragestellung seien zunächst die wichtigsten Gesichtspunkte zusammengestellt, die zugunsten einer finitistischen Lösung des Deutungsproblems sprechen.

a) Werden die Wahrscheinlichkeitsaussagen in der Physik transfinit — mittels des Limesbegriffs — interpretiert, so ist kein finiter Satz aus ihnen ableitbar, und daher kann kein empirischer Befund (genauer: kein finiter physikalischer Satz) eine Wahrscheinlichkeitsaussage selbst nur näherungsweise bestätigen oder widerlegen.

b) Tatsächlich stützt man sich in der empirischen Wissenschaft bei der Prüfung einer Wahrscheinlichkeitsaussage stets auf ein finites Material; insbesondere wendet man die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch auf solche Beobachtungsreihen an, die nicht einmal „im Prinzip" bedingungslos beliebig verlängerbar sind, wie es die Anwendung des Limesbegriffs der Wahrscheinlichkeit im Sinne der statistischen Theorie voraussetzt: man denke etwa an das Gebiet der Sozialstatistik, ferner an alle im engeren Sinne physikalischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, soweit sie sich auf Scharmittelungen stützen: dort würde die „beliebige Erweiterbarkeit" des statistischen Materials voraussetzen, daß es „unendlich viele" gleichartige Dinge oder Vorgänge in der Welt gebe; z. B. in der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Elektronenstatistik: unendlich viele Elektronen. Ganz abgesehen davon nun, daß der Sinn einer derartigen Hypothese noch sorgfältiger Klärung bedürfte, darf jedenfalls gesagt werden, daß die Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden in der Physik nicht davon abhängig gemacht wird, ob solche Voraussetzungen als sinnvoll und gültig angesehen werden oder nicht. Entsprechendes gilt von denjenigen Fällen, in denen die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf zeitliche Mittelbildungen angewandt wird.

c) Sehr klar tritt der finitistische Charakter des wissenschaftlichen Gebrauchs der Wahrscheinlichkeitsaussagen in der heutigen Physik an solchen Stellen hervor, wo statistisch gedeutete Wahrscheinlichkeitswerte mit den Werten anderer physikalischer Größen in Zusammenhang gebracht werden; dies geschieht z. B., wenn man im Rahmen der Bohrschen Theorie die Intensitätsverhältnisse von Spektrallinien gleich den Verhältnissen der entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten ansetzt: Da in endlicher Beobachtungszeit gewiß nur endlich viele Quantensprünge stattfinden, so bedeutet nämlich jener Ansatz, daß die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Überganges durch seine relative Häufigkeit in einer endlichen Menge von Quantensprüngen ersetzt wird; und ohne eine solche Finitisierung wäre der Wahrscheinlichkeitsbegriff offenbar nicht zur Vermittlung jener kontrollierbaren Aussage über Intensitätsverhältnisse geeignet. Ein ganz ähnlicher Fall liegt vor, wenn aus der Zerfallswahrscheinlichkeit einer radioaktiven

Substanz in bekannter Weise berechnet wird, wie viele von N Atomen dieser Substanz nach Ablauf einer Zeit noch vorhanden sind.

3. Besonders im Hinblick auf die unter 2 a kurz in Erinnerung gebrachten logischen Schwierigkeiten der transfiniten Deutung des physiphysikalischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs sind denn auch finitistische Tendenzen bereits mehrfach in der Diskussion des Wahrscheinlichkeitsbegriffs hervorgetreten. Ein typisches und instruktives Beispiel für solche Bestrebungen stellt die Frage dar, die O. Neurath 1929 auf der Prager Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften aufwarf: „ob sich nicht der Begriff des Infiniten ausschalten ließe, indem schon das Gebäude der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung statt auf dem Begriff des Kollektivs auf dem einer endlichen Menge von Elementen aufgebaut werden könnte" („Erkenntnis", I, 277). — R. v. Mises, an den diese Frage gerichtet war, erwiderte damals: „Man könnte versuchen, mit endlichen Häufigkeitswerten zu arbeiten, das wäre aber sehr schwierig und unübersichtlich, und man würde keinen einzigen einfachen Satz herausbekommen. Der erste Ansatz, den eine Versicherungsgesellschaft bei ihren Rechnungen macht, setzt schon eine unendliche Masse voraus. Es verhält sich demnach so: Aus praktischen Gründen bedient man sich der infiniten Theorie, man rechnet, obwohl das Versuchsmaterial endlichen Abschnitten entnommen ist, so, als ob es unendlich wäre, und in allen Operationen bedient man sich der Rechenregeln, die auf der Annahme unendlicher Kollektivs beruhen, weil sie kürzer, einfacher, übersichtlicher sind" („Erkenntnis" I, 279).

Diese Diskussion beleuchtet sehr deutlich eine Auffassung, die einer Finitisierung, wie sie hier gemeint wird, im Grunde hinderlich ist: Es wird hier nämlich nicht deutlich unterschieden zwischen der logischen Struktur der Sätze einer formalisierten Theorie und der logischen Struktur der ihnen durch die Deutungsvorschrift zugeordneten physikalischen Sätze. Wie die vorangegangenen Überlegungen zeigen, ist es nun für eine Behebung der logischen Schwierigkeiten des Wahrscheinlichkeitsbegriffs keineswegs erforderlich, die kalkülmäßige Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu finitisieren — in der formalen Wahrscheinlichkeitsrechnung können transfinite Begriffsbildungen (insbesondere der Limesbegriff der Analysis) ebenso auftreten, wie in jeder anderen formalen Theorie einer physikalischen Disziplin; wesentlich ist lediglich, daß die physikalische Deutung der Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung keinen transfiniten Charakter erhält: nicht der Kalkül also muß finitisiert werden, sondern die Anweisungen zur Kontrolle der mittels seiner zu gewinnenden physikalischen Sätze.

Wenn man es bisher i. a. für erforderlich gehalten hat, die physikalische Deutung der Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung transfinit zu gestalten, so dürften hierfür im wesentlichen zwei Gesichtspunkte bestimmend gewesen sein:

a) Erstens hat sich, wie auch v. M i s e s a. a. O. hervorhebt, erwiesen, daß die mathematische Durchführung des Grundgedankens der statistischen Wahrscheinlichkeitstheorie bei Zuhilfenahme des Limesbegriffs eine verhältnismäßig einfache Gestalt annimmt, während das Operieren mit den relativen Häufigkeiten in endlichen Reihen zu rechnerischen Komplikationen und zu sehr unübersichtlichen allgemeinen Sätzen führt. Wenn man aber mit einem transfiniten Kalkül zugleich auch eine transfinite Deutungsvorschrift für unumgänglich hielt, so dürfte dies wohl durch eine Vernachlässigung des eben erörterten Unterschiedes mitbestimmt sein, und tatsächlich sprechen, wie bereits betont wurde, die oben zugunsten einer Finitisierung beigebrachten Erwägungen nicht gegen die Anwendung eines transfiniten Kalküls, sondern nur gegen die Anwendung transfiniter Deutungsvorschriften.

Auch in diesem Zusammenhange ist es daher von Bedeutung, daß R e i c h e n b a c h für die Axiomatik selbst der formal-mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Darstellungsweise entwickeln konnte, die auf das Hilfsmittel des Limesbegriffs verzichtet, und daß er ferner durch den Nachweis des Modellcharakters der statistischen Theorie den Limesbegriff gewissermaßen als unwesentlich für den Aufbau der formalen Wahrscheinlichkeitsrechnung erweisen konnte. Der Umstand, daß bis dahin der Limesbegriff auch in der allgemeinen formalen Wahrscheinlichkeitsrechnung als wesentlich angesehen worden war, hatte eben dazu geführt, daß man die Geltung der — physikalisch zu interpretierenden — Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf unendliche konvergente Folgen physikalischer Häufigkeitszahlen beschränken zu müssen glaubte und damit Voraussetzungen schuf für viele der logischen Probleme, mit denen der Aufbau einer empiristischen Theorie der Wahrscheinlichkeit seither belastet ist.

b) Aber noch eine zweite Erwägung wird mitbestimmend gewesen sein, wenn man bisher an dem Gedanken einer transfiniten physikalischen Deutung der Wahrscheinlichkeitsaussagen festhalten zu müssen glaubte. Es liegt nämlich der Einwand nahe, daß eine finite, ausdrücklich auf endliche Beobachtungsreihen bezogene Deutung einer Wahrscheinlichkeitsaussage in manchen Fällen geradezu kontradiktorisch sei, und in keinem Falle das treffe, was man in der empirischen Wissenschaft mit einer Wahrscheinlichkeitsaussage „eigentlich meine".

Eine finitistische Interpretation etwa des Satzes: „Die Wahrscheinlichkeit, mit diesem Würfel einen Fünferwurf zu machen, ist $^1/_6$"

würde nämlich in erster Annäherung so lauten: „In jeder Reihe mit einer beliebigen endlichen Zahl n von Würfen mit diesem Würfel treten $n_V = \frac{n}{6}$ Fünferwürfe auf."

Hier besagt nun der obengenannte Einwand:

(α) Diese Formulierung ist kontradiktorisch für alle Werte n, die nicht ganzzahlige Vielfache von 6 sind;

(β) sie trifft aber auch abgesehen hiervon nicht den physikalischen Sinn der Wahrscheinlichkeitsaussage; denn mit dem betrachteten Wahrscheinlichkeitsansatz will man die relative Häufigkeit der Fünferwürfe auch in den Wurfserien mit einer durch 6 teilbaren Gliederzahl nicht genau auf $^1/_6$ festlegen, sondern erwartet im Gegenteil regelmäßig auch größere Abweichungen. Wollte man also die oben betrachtete finitistische Deutung der Wahrscheinlichkeitsaussagen einführen, so würde damit jede von der gegenwärtigen empirischen Wissenschaft anerkannte Wahrscheinlichkeitsaussage zu einem falschen Satze, da mindestens ein Teil ihrer Folgesätze falsch ist (vgl. die Bemerkungen über den logischen Charakter einer Hypothese, S. 26 f.).

Es ist nun zu beachten, daß diese Einwände durchaus nicht — und in diesem Zusammenhange wurden sie eben erörtert — eine Rechtfertigung der transfiniten Deutung der empirischen Wahrscheinlichkeitsaussagen darstellen. Die oben zusammengestellten Argumente gegen eine solche Deutung bleiben von den eben betrachteten Erwägungen offenbar unberührt. So können die eben erörterten Bedenken, die durchaus nicht von der Hand zu weisen sind, lediglich als Anhaltspunkte für eine Korrektur des hier versuchten finitistischen Deutungsversuches gelten.

Nun läßt sich die Schwierigkeit (α) durch eine weiter unten dargelegte leichte Abänderung der Deutungsvorschrift beseitigen; der Einwand (β) indessen macht eine eingehende Auseinandersetzung erforderlich, zu der wir nun übergehen.

4. Es soll zunächst gezeigt werden, daß *die logische Situation im Falle einer Wahrscheinlichkeitsaussage nicht wesentlich von derjenigen verschieden ist, die für jeden beliebigen anderen empirischen Satz der Physik vorliegt.* Zur Erläuterung diene ein Satz mit einer konkreten quantitativen Angabe: „Der Abstand der beiden Strichmarken auf dem Stabe Z beträgt bei T° absoluter Temperatur α Meter."

Sätze dieser Art sind in unserem Zusammenhange von besonderem Interesse, weil man ihren Gehalt, ebenso wie den der Wahrscheinlichkeitsaussagen, häufig mittels des Limesbegriffs zu erfassen sucht; dies geschieht dann etwa nach dem folgenden Schema: „Wird an dem auf die absolute Temperatur T gebrachten Stab Z eine beliebig ver-

längerbare Reihe von Messungen des Abstandes der beiden Marken vorgenommen, so konvergieren die Mittelwerte der in Metern auszudrückenden Messungsergebnisse gegen α."

Hier wie im Falle der Wahrscheinlichkeitsaussagen wird der Limesbegriff zur mathematischen Präzisierung des Gehaltes einer Hypothese herangezogen, und hier wie dort zeigt sich — im Hinblick auf das in der Physik geübte Verfahren der Nachprüfung einer solchen Angabe —, daß die Kontrolle der Hypothese in der empirischen Untersuchung der Folgesätze besteht, die aus der Hypothese — nötigenfalls unter Hinzunahme weiterer Naturgesetze oder Einzelsätze — in beliebiger Zahl abgeleitet werden können; tatsächlich erfolgt ja die empirische Kontrolle einer Längenangabe i. a. durch Vergleich der Mittelwerte endlicher Reihen von Längenmessungen an dem betreffenden Stabe mit dem in der Längenangabe angesetzten Werte α. Und es zeigt sich, daß auch in diesem Falle die Geltung der Längenangabe nicht davon abhängig gemacht wird, daß alle nachgeprüften Folgesätze sich als streng erfüllt erweisen; tatsächlich kann sehr wohl die betreffende Längenangabe in den Bestand der anerkannten physikalischen Sätze aufgenommen werden, ohne daß die Mittelwerte der zur Nachprüfung dienenden Messungsreihen wirklich alle gleich α wären. Wollte man also einen physikalischen Satz bereits dann ungültig nennen, wenn einer seiner Folgesätze sich als nicht streng erfüllt erweist, so würde man von vornherein praktisch sämtliche Sätze der Physik als falsch bezeichnen müssen. Hier scheint also eine wesentliche Abänderung der früher (S. 26 f.) gekennzeichneten Auffassung von der logischen Funktion der Hypothesen der empirischen Wissenschaft erforderlich zu werden.

Stellt man das Deutungsproblem der Wahrscheinlichkeitsaussagen in einen solchen weiteren Rahmen, so scheint sich nicht mehr die unbedingte Ablehnung jenes finitistischen Deutungsversuches zugunsten jener engeren Auffassung von der Bedeutung der empirischen Sätze zu empfehlen, sondern im Gegenteil eine durchgängige Auflockerung jener Auffassung zugunsten der Möglichkeit einer finitistischen Interpretation auch der Wahrscheinlichkeitsaussagen. Der leitende Gedanke der Auflockerung, die hier vorgeschlagen werden soll, ist der, daß die empirische Kontrolle eines Satzes stets nur zu einer graduellen Entscheidung führen kann, und daß für die Beurteilung des Bewährungsgrades eines Satzes Gesichtspunkte bedeutsam werden, die eine befriedigende rationelle Nachkonstruktion nicht mehr allgemein zulassen.

Diese Andeutungen sollen nun präzisiert werden. Dabei wird sich die Art der Betrachtung wesentlich an Carnap ([Protokollsätze]) und Neurath ([Protokollsätze]) anschließen, ohne daß indessen

immer konsequent die „formale Redeweise“ (Carnap: [Sprache]) durchgeführt werden wird.

5. Wir beschränken uns zunächst auf die Sprache der klassischen Physik. Diese stellt ein System von Sätzen dar, die nach gewissen „syntaktischen“ Regeln aus bestimmten Grundbestandteilen aufgebaut sind, und zwischen denen gewisse Ableitungsbeziehungen bestehen.

Die formal einfachsten Sätze schreiben einzelnen Punkten oder Gebieten der vierdimensionalen Welt bestimmte Qualitäten oder Werte von Zustandsgrößen (die nicht notwendig skalar sind) zu; außerdem enthält die physikalische Sprache generelle Sätze, die i. a. die Gestalt genereller Implikationen haben. Die bekanntesten Beispiele hierfür sind die Naturgesetze; indessen erweisen sich bei korrekter Formulierung auch viele derjenigen Sätze als generell, die in der Umgangssprache formuliert als singulär erscheinen; so z. B. der Satz: „Die Dichte des Quecksilbers bei 18° C ist 13,55“ u. v. a.

Dem Umstande, daß die Physik nicht abgeschlossen vorliegt, sondern auf Grund ihrer Forschungen beständig zu neuen Erkenntnissen gelangt, wird in dieser formalen Betrachtungsweise dadurch Rechnung getragen, daß der Satzbestand der Physik (und ebenso der gesamten empirischen Wissenschaft) als veränderlich angesetzt wird; jede neue empirische Erkenntnis bedeutet die Aufnahme eines neuen Satzes in den Bestand der anerkannten Sätze der Physik, die dafür i. a. die Streichung gewisser „alter“ Sätze erforderlich machen wird. Dabei nennen wir einen Satz „alt“ oder „neu“, je nachdem er eine logische Folge der bereits anerkannten Sätze ist oder nicht.

Welche Kriterien entscheiden nun darüber, ob ein für die Aufnahme in Vorschlag gebrachter neuer Satz — wir wollen einen solchen, unabhängig von seiner logischen Form, auch eine „Hypothese“ nennen — in den Bestand der physikalischen Sätze aufgenommen oder als nicht gültig zurückgewiesen wird? — Man pflegt in der üblichen „inhaltlichen“ (Carnap) Redeweise zu sagen, die empirische Wissenschaft vermöge zu jedem ihrer Sätze bestimmte Verifikationsbedingungen anzugeben, die es gestatten, durch geeignete Beobachtungen oder Experimente die Wahrheit oder Falschheit des betreffenden Satzes festzustellen. (Zwischen der beobachtenden Methode der Astronomie und anderer Wissenschaftszweige und dem experimentellen Verfahren, wie es u. a. in den exakten Naturwissenschaften gehandhabt wird, bestehen keine grundsätzlichen Unterschiede, und wir brauchen daher im folgenden auch die terminologische Unterscheidung nicht immer ausdrücklich durchzuführen.) Das Nachprüfungsverfahren stützt sich also auf Anweisungen zu geeigneten Kontrollversuchen und macht die Wahrheit des Satzes von dem Ausfall der Versuche abhängig. Dabei

ist es erkenntnistheoretisch ohne Belang, ob die Versuche, mittels deren eine Hypothese geprüft wird, zeitlich vor der Aufstellung der Hypothese durchgeführt wurden, oder ob sie nachträglich eigens als Kontrollversuche angestellt werden. Erkenntnispraktisch liegt hier freilich u. U. ein sehr wichtiger Unterschied vor: in dem zuerst genannten Falle kann es sich um die „Aufstellung einer Hypothese an Hand bestimmter empirischer Daten", im anderen dagegen um die „nachträgliche Nachprüfung" einer — anderweitig gewonnenen oder auch auf Grund einer Vermutung probeweise angesetzten — Hypothese durch ein eigens zu diesem Zwecke beschafftes empirisches Material handeln. Die logische Struktur des Kontrollverfahrens ist indessen in beiden Fällen dieselbe: Jedesmal wird die zu prüfende Aussage, die „Hypothese", mit dem Gesamtbestande der anerkannten physikalischen Sätze konfrontiert.

Diese Konfrontation geschieht nach folgendem Schema: Zu der Hypothese h werden geeignete generelle oder singuläre Sätze $p_1, p_2, \ldots, p_k$ aus dem Bestande der anerkannten physikalischen Sätze, der mit S bezeichnet werde, adjungiert; aus der so entstehenden Satzmenge $\{h, p_1, \ldots, p_k\}$ werden gewisse Folgesätze $f_1, f_2, \ldots, f_l$ abgeleitet, und diese werden mit geeigneten weiteren Sätzen $g_1, g_2 \ldots, g_m$ aus S verglichen.

Beispiel: h bedeute: „Die spezifische Wärme des Kupfers bei Zimmertemperatur beträgt $0{,}09 \frac{\text{cal.}}{\text{grad} \cdot \text{g}}$." — Das empirische Meßverfahren, das zur Nachprüfung dieser Angabe dient, bestehe darin, daß eine bestimmte Menge Kupferspäne von bekannter Temperatur in Wasser von bekannter Masse und Temperatur gebracht werden und schließlich die Endtemperatur des Wassers ermittelt wird. In diesem Falle enthält die Menge der Sätze $p_\varkappa$ das Gesetz über die Mischungstemperaturen sowie den Satz, daß die spezifische Wärme des Wassers gleich 1 ist; ferner noch die konkreten Angaben über den Versuch, etwa: Es wurden 100 Gramm Kupferspäne von $60{,}0^0$ mit 250 Gramm Wasser von $20{,}0^0$ gemischt. — Aus h läßt sich nun, unter Zuhilfenahme der genannten Sätze, ein Folgesatz über die Endtemperatur ableiten; dieser lautet (f_1): „Die Endtemperatur beträgt

$$t = \frac{100 \cdot 50 \cdot 0{,}09 + 200 \cdot 20}{100 \cdot 00{,}9 + 200}\,^0\,\text{“}.$$

Dieser Satz wird nun mit demjenigen verglichen, der das Beobachtungsergebnis enthält; er lautet etwa (g_1): „Die Endtemperatur betrug $21{,}5^0$."

Häufig werden mehrere Kontrollversuche angestellt; es werden also die konkreten Angaben über Masse und Temperatur des Wassers und des Kupfers durch andere ersetzt, und die aus diesen Angaben zusammen mit der Mischungsregel ableitbare Aussage über die Endtemperatur wird dann mit einem geigneten Satze g des Bestandes S (i. a. mit einem Satze, der das Ergebnis der Messung der Endtemperatur enthält) verglichen.

Außer durch eine andere Wahl der in die Nachprüfung eingehenden experimentellen Konstanten kann man auch dadurch weitere Kontrollsätze zu der betrachteten Hypothese gewinnen, daß man statt der eben herangezogenen Mischungsregel andere Naturgesetze aus dem System S wählt, die die

spezifiische Wärme eines Stoffes mit irgendwelchen anderen physikalischen Größen verknüpfen; so lassen sich neue Folgesätze f_1', f_2', ... f_n' herleiten, die mit geeigneten Sätzen g_1', g_2' ..., g_r' (dies sind häufig Berichte über physikalische Beobachtungen) aus S verglichen werden können.

In diesem Zusamenhange seien zwei Momente besonders hervorgehoben:

a) Wir wollen solche Sätze g_μ aus S, an denen die Prüfung einer Hypothese erfolgt, „Kontrollsätze" nennen; ferner sollen diejenigen Sätze f_λ, die aus der Hypothese und geeigneten weiteren Prämissen abgeleitet werden, als „Kontrollfolgesätze" oder kurz „Kontrollfolgen" der Hypothese bezeichnet werden. Die Prüfung einer Hypothese besteht dann in einem Vergleich geeigneter unter ihren Kontrollfolgen mit gewissen Kontrollsätzen; eine Kontrollfolge muß also stets dieselbe logische Struktur aufweisen wie der Kontrollsatz, mit dem sie verglichen wird.

Es ist zu beachten, daß im Prinzip jeder beliebige Satz aus S als Kontrollsatz fungiern kann; die Kontrollsätze — und ebenso daher die Kontrollfolgen — unterliegen in der Wissenschaft keinerlei einschränkenden Bedingungen: Insbesondere sind sie weder auf die Klasse der formal einfachsten Sätze der physikalischen Sprache noch auf die Klasse der sog. „Beobachtungsaussagen" beschränkt. (Man vergleiche hierzu die eingehenden Ausführungen in Carnap: [Protokollsätze], S. 222 ff. Die hier skizzierten syntaktischen Feststellungen charakterisieren bei Carnap eine unter mehreren möglichen Sprachformen, die er als zweite Sprachform, Weg B bezeichnet: Protokollsätze ohne Beschränkung innerhalb der Systemsprache. Hier ist lediglich diese eine Sprachform in Betracht gezogen worden, da sie — und dies dürfte auch die Ansicht Carnaps sein — die Struktur der Sprache der gegenwärtigen Wissenschaft am genauesten darstellt.)

b) Die vorstehenden Überlegungen (S. 48 ff.) bestätigen die „klassische" Auffassung vom logischen Charakter der Hypothesen (vgl. S. 26 f.) insofern, als sie ergeben, daß eine Hypothese nicht endgültig widerlegbar ist: denn jede Hypothese, mag sie die Form eines generellen oder die eines singulären Satzes haben, gestattet die Aufstellung beliebig vieler Kontrollfolgen, von denen jeweils nur endlich viele nachgeprüft werden können. Ebenso wie einer endgültigen Verifikation entziehen sich aber — entgegen der klassischen Auffassung — die Hypothesen auch einer endgültigen Falsifikation. Man betrachte z. B. die S. 48 f. durchgeführte Analyse einer konkreten Längenangabe: es wurde dort bereits darauf hingewiesen, daß — was besonders Reichenbach mehrfach betont — eine solche Hypothese nicht notwendig als widerlegt gilt, wenn ihre Kontrollfolgen sich nicht streng

als wahr erweisen, wenn also die Einzelwerte, ja auch die Mittelwerte einer Reihe von Längenmessungen an einem Stabe nicht genau mit der hypothetisch angesetzten Stablänge übereinstimmen. Eine singuläre oder generelle Hypothese kann daher durch ein bestimmtes empirisches Material (eine bestimmte Menge von Kontrollsätzen) stets nur graduell bestätigt oder widerlegt werden.

Freilich bleibt die Entscheidung darüber, ob eine Hypothese angesichts bestimmter empirischer Kontrollsätze anerkannt oder abgelehnt wird, nicht völlig willkürlich; sie wird im betrachteten Beispiel etwa durch die Abweichung der in der Hypothese angesetzten Länge vom Mittelwert einer Reihe von Messungsergebnissen bestimmt werden; bei genauerer Beurteilung wird man die Streuung der gemessenen Werte in bezug auf den angesetzten Wert oder ähnliche finit ermittelbare Kontrollgrößen berücksichtigen. Es würde auch keine prinzipielle Schwierigkeit bereiten, in solchen und ähnlichen Fällen eine analytische Funktion der angesetzten Länge α und der in die Beurteilung eingehenden, empirisch zu ermittelnden Größen aufzustellen, die in einiger Anpassung an das in der Wissenschaft übliche Verfahren ein numerisches Maß für „den Grad der Bewährung einer Längenangabe in bezug auf ein bestimmtes empirisches Material" definieren würde. Indessen würde die Einführung derartiger Funktionen in die rationale Nachkonstruktion der Sprache der empirischen Wissenschaft eine bedenkliche Schematisierung darstellen: Erstens nämlich würde man sich bei der Ansetzung jener Funktionen jeweils auf die mathematische Erfassung des Bewährungsgrades beschränken müssen, den eine bestimmte Zahl von Kontrollsätzen bestimmter Form einer Hypothese erteilt (Beispiel: Berechnung des Bewährungsgrades einer konkreten Längenangabe bezüglich einer Reihe von 10 Kontrollmessungen eines bestimmten physikalischen Typs), während die Prüfung einer Hypothese im Prinzip durch einen Vergleich mit der G e s a m t h e i t der jeweils anerkannten Sätze erfolgt. Freilich zieht man in der wissenschaftlichen Praxis für die Nachprüfung einer Hypothese stets nur einen endlichen Ausschnitt von S als Kontrollmaterial heran; aber dieser ist durch die Hypothese nicht festgelegt; seine Wahl ist eine Frage der Forschungspraxis; insbesondere können die Kontrollsätze, an Hand deren man eine Hypothese prüft, von verschiedener logischer Struktur sein und zudem mit sehr verschiedenem „Gewicht" in die Nachprüfung eingehen; es kann z. B. sein, daß übergreifender Gesichtspunkte wegen, etwa zur Aufrechterhaltung eines allgemeinen Gesetzes, eine Hypothese anerkannt wird, obgleich die untersuchten Kontrollfolgen nicht alle in sehr gutem Einklang mit den Kontrollsätzen aus S stehen; und alle diese Momente würden eine mathematische Nachkon-

struktion des Bewährungsgrades als eine sehr weitgehende Schematisierung erscheinen lassen. (Es sei hier noch besonders betont, daß sich die Kontrolle einer Hypothese keineswegs immer auf ein statistisches Material aus gleichartigen Fällen stützt, und daß die Methoden, die überhaupt zur Aufstellung von Funktionen der erwähnten Art führen könnten, daher wesentlich umfassender sein müßten, als etwa die in der Statistik entwickelten Verfahren.)

Immerhin mag man sich fragen, ob nicht die bisher zugrunde gelegte Form der physikalischen Sprache, in der nach dem bereits mehrfach geschilderten Verfahren aus jeder Hypothese gewisse weitere Sätze als streng notwendige Folgen abgeleitet werden können, durch eine der oben geschilderten Situation besser angepaßte Sprache ersetzt werden könne. So könnte man etwa daran denken, die physikalische Sprache derart aufzubauen, daß die Kontrollfolgen einer Hypothese nicht mehr als streng notwendige Folgen erscheinen, sondern daß eine Hypothese für jede ihrer Kontrollfolgen einen bestimmten Spielraum festlegt. Indessen würde, wie sich auch aus Überlegungen ergibt, die Reichenbach in ähnlichem Zusammenhange angestellt hat, jede Festsetzung über die fraglichen Spielräume wieder eine wesentliche Schematisierung des wissenschaftlichen Verfahrens darstellen, und es lassen sich überhaupt sämtliche soeben gegenüber einer mathematischen Präzisierung des Bewährungsgrades erhobenen Bedenken sinngemäß auf diesen Fall übertragen; denn für die uns hier beschäftigende Frage der Nachprüfbarkeit besteht offenbar kein prinzipieller Unterschied zwischen solchen Sätzen, die einer physikalischen Zustandsgröße einen bestimmten Wert zuschreiben und solchen, die die Werte einer Zustandsgröße auf ein festes Intervall beschränken.

Aus diesen Gründen scheint sich mir der Vorschlag zu empfehlen, innerhalb der wissenschaftlichen Sprache die Formen des generellen und des singulären Satzes sowie das deduktive Folgeschema beizubehalten; es soll bald erörtert werden, daß auch die Wahrscheinlichkeitsaussagen sich in bestimmter Weise, und zwar gerade im Sinne einer finitistischen Deutung, in eine solche Sprache eingliedern lassen.

6. Vor dem Übergang zu dieser Erörterung werde eine Konsequenz der bisherigen Überlegungen noch besonders hervorgehoben. Es ist in dieser Arbeit mehrfach die Frage nach dem Gehalt eines Satzes, z. B. einer Wahrscheinlichkeitsaussage, aufgetaucht; die Frage, was eine Wahrscheinlichkeitsaussage in der empirischen Wissenschaft „eigentlich besage". Über die zu Beginn dieses Paragraphen angestellten Überlegungen bezüglich des logischen Charakters dieser Frage hinaus zeigen nun auch die zuletzt dargelegten Erwägungen, daß noch aus anderen Gründen eine solche Frage keine eindeutige Beantwortung zuläßt; vor allem nicht in dem Sinne, als könnte wenig-

stens für singuläre Sätze eine endliche Reihe von Wahrheitsbedingungen angegeben werden. Man wird vielmehr jetzt besser sagen: Ein Satz besagt so viel, wie die Menge aller seiner Kontrollfolgen; und diese ist nicht durch den betreffenden Satz allein festgelegt, sondern erst durch die Gesamtheit der Sätze des Systems S zusammen mit dem gerade betrachteten Satz; denn zur Ableitung von Kontrollfolgen aus einer Hypothese h werden ja zu dieser im allgemeinen noch beliebige Sätze aus S adjungiert.

In diesem Zusammenhange erhält auch die früher aufgetretene Frage nach der Deutungsvorschrift für die Formeln einer physikalischen Theorie eine veränderte Gestalt; jede solche Formel stellt nämlich ebenfalls einen Satz der Physik dar, und die Frage nach der Deutungsvorschrift ist nun durch die Frage nach der Gesamtheit der Kontrollfolgen der betrachteten Formel zu ersetzen.

Es sei h z. B. wieder die Hypothese: „Der Abstand der beiden Strichmarken auf dem Stabe Z beträgt bei T^0 absoluter Temperatur α Meter", oder in einer mehr formelhaften Schreibweise innerhalb einer Rechnung der „theoretischen Physik": $(\overline{M_1\ M_2})_T = \alpha$ (hierbei sind die Marken mit M_1, M_2 bezeichnet). Die Frage, was diese Formel besage, wie sie physikalisch zu deuten sei, welchen physikalischen Gehalt sie besitze u. ä., ist dann so zu beantworten: Die Formel besagt ebensoviel wie die Gesamtheit aller Sätze, die auf Grund der Formel aufgestellt werden können; in präziserer, aber noch der üblichen Redeweise angepaßter Formulierung: Die Formel besagt soviel wie die Gesamtheit derjenigen Sätze, die auf Grund logischer oder physikalischer Sätze aus ihr abgeleitet werden können. In eine solche Ableitung können aber, wie bereits betont wurde, und sogleich nochmals erläutert werden wird, auch noch empirische Befunde, d. h. bereits anerkannte singuläre Sätze eingehen.

Hiernach wäre der Gehalt der Hypothese h angemessener durch die (unendliche) Klasse der Folgen der Vereinigungsmenge von $\{h\}$ und S zu kennzeichnen, wobei S die Menge der anerkannten generellen und singulären empirischen Sätze bedeutet. Sind nun aber p und q zwei bereits anerkannte Sätze, so hätten sie dieser Charakterisierung zufolge denselben Gehalt, da sowohl p als auch q zu S gehören und daher die Vereinigungsmenge von $\{p\}$ und S gleich der Vereinigungsmenge von $\{q\}$ und S ist. Diese begriffliche Härte läßt sich folgendermaßen vermeiden. Es sei S die Menge der anerkannten empirischen Sätze, h eine empirische Hypothese. Ist h Element von S, so verstehe man unter S* die Menge derjenigen Elemente von S, die nicht mit h analytisch äquivalent sind; ist h nicht Element von S, so setze man $S^* = S$. Unter dem Gehalt von h verstehe man nun die Menge der-

jenigen Sätze, die analytische Folgen der Vereinigungsmenge von {h} und S*, aber nicht bereits analytische Folgen von S* allein sind.

Der schon mehrfach erwähnte Gedanke, daß eine Hypothese unendlich viele Einzelkonsequenzen besitze (und daher grundsätzlich nicht vollständig verifizierbar sei), läßt sich jetzt so aussprechen: Das System S läßt sich auf beliebig viele verschiedene Weisen durch Einführung neuer Sätze („inhaltlich" gesprochen: durch Realisierung immer neuer Versuchsbedingungen zur Nachprüfung von h) so erweitern, daß auch der Gehalt von h erweitert wird. In diesem Sinne wollen wir sagen, daß eine Hypothese beliebig viele Kontrollfolgen besitze.

Es seien nun für den Fall der vorhin betrachteten speziellen Hypothese h einige der mannigfachen verschiedenen Möglichkeiten der Herleitung von Kontrollfolgen angegeben; alle hier aufzuweisenden Kontrollfolgen gehören zum „Gehalt" von h, falls die im folgenden stets besonders genannten weiteren Sätze dem System S angehören.

a) Der betrachtete Stab bilde eine Seite eines rechteckigen Rahmens aus gleichartigen Stäben; die Länge der anderen Seite bei der Temperatur T sei empirisch bestimmt. Dann gehören zu S also gewisse singuläre Sätze, die diese Länge angeben, und die ferner aussagen, daß ein physikalisches R e c h t e c k vorliegt; zu diesen Sätzen adjungiere man den pythagoreischen Lehrsatz der physikalischen Geometrie (also ein bestimmtes Naturgesetz aus S) und die Hypothese h. Aus diesen Sätzen, die eine Teilmenge der Vereinigungsmenge von {h} und S bilden, folgt in bekannter Weise ein Satz f_1 über die Länge der Diagonale des Rechtecks, gemessen bei T^0. Dieser ist Element des Gehaltes von h.

Hier wird also zu h, einem Satz der physikalischen Geometrie, eine Reihe weiterer solcher Sätze sowie ein genereller Satz der physikalischen Geometrie adjungiert und als Kontrollfolge wiederum ein Satz der physikalischen Geometrie gewonnen, der dieselbe Struktur besitz wie h. (Zur empirischen Prüfung einer Längenangabe dienen Kontrollmethoden dieses Typs vor allem in der Landesaufnahme.)

b) Es gelte der Satz p_1: „Der Stab Z besteht aus Kupfer." Mit p_2 werde der zu S gehörige Satz bezeichnet: „Der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient des Kupfers ist 0,0000165." p_3 sei das Gesetz, das die Länge eines Stabes bei der Temperatur T′ durch seine Länge α bei der Temperatur T und durch seinen thermischen Ausdehnungskoeffizienten auszudrücken gestattet. Dann läßt sich aus der Satzmenge $\{h, p_1, p_2, p_3\}$ ein Folgesatz f_2 von der Form herleiten: „Die Länge des Stabes beträgt bei der Temperatur T'^0 abs. α' Meter."

Durch Änderung des Wertes von T′ erhält man so beliebig viele Kontrollfolgen $f_2^{(v)}$ von h, die sämtlich zum physikalischen Gehalt von h gehören.

Es handelt sich hier um eine Charakterisierung des Gehaltes von h; zum Zweck einer Nachprüfung wird man nun solche Werte von T′ eintragen, bei denen die Länge des Stabes tatsächlich gemessen ist: man wird solche Kontrollfragen herausgreifen, zu denen „passende" Kontrollsätze in S vorliegen.

Hier werden also andere Naturgesetze als im vorigen Falle zu h adjungiert, und es wird wiederum eine Längenangabe abgeleitet, die mit h formgleich ist.

c) Es gelte wieder p_1: „Der Stab Z besteht aus Kupfer", ferner p_4: „Der Stab Z hat den konstanten Querschnitt q cm²" und p_5: „Der spezifische Widerstand des Kupfers bei der Temperatur T ist σ." P_6 sei das Gesetz, das den Widerstand eines homogenen Metallstabes von konstantem Querschnitt durch seine Länge, seinen Querschnitt und den spezifischen Widerstand seines Materials ausdrückt; dann läßt sich aus $\{h, p_1, p_4, p_5, p_6\}$ ein Folgesatz f_3 ableiten, der den Leitungswiderstand des Stabes Z angibt.

Hier werden also wiederum andere generelle und singuläre Sätze aus S herangezogen, und die Kontrollfolge hat jetzt eine andere logische Form als h, nämlich die einer Widerstandsangabe für einen stabförmigen Leiter.

d) Als Antwort auf die Frage nach dem „eigentlichen Sinn" einer Längenangabe wird man vielleicht zunächst die Angabe der bei direkter Längenmessung zu erwartenden Meßbefunde oder geradezu eine Anweisung zur Ausführung geeigneter Messungen erwarten; allein alle derartigen Angaben ordnen sich bei genauerer Formulierung in die obige Charakterisierung ein. Der Grundgedanke der Übertragung solcher Anweisungen in die „formale Redeweise" besteht darin, daß man die „Anweisungen", etwa zur Messung einer Temperatur oder einer Länge durch geeignete Kontrollfolgen des Satzes „An der Stelle P herrscht zur Zeit t die Temperatur T", bezw. „Der Stab Z hat bei der Temperatur T die Länge a" ersetzt; diese Kontrollfolgen stellen nämlich den theoretischen Gehalt jener Anweisungen dar; normativ zu formulierende Hinweise wie „Man bringe ein Thermometer an die Stelle P" oder dergleichen gehören dagegen nicht zum Gehalt eines Satzes, der den Wert einer Zustandsgröße angibt.

Häufig stützt sich die „direkte Nachprüfung", wie man sie gewöhnlich versteht, auf die Untersuchung solcher Kontrollfolgen, die die Form einer Beobachtungsaussage haben. Diese Beobachtungsaussagen hängen aber mit der Hypothese nicht anders zusammen als andere Kontrollfolgen: auch sie werden aus der Hypothese — unter Hinzunahme geeigneter weiterer Prämissen — abgeleitet. Zunächst freilich mag der Eindruck entstehen, als werde das oben entwickelte logische

Schema der empirischen Kontrolle wissenschaftlicher Sätze durchbrochen, wenn man von den rein physikalischen Kontrollfolgen einer Hypothese zu einer noch elementareren Schicht der Nachprüfung übergehe, wenn man nämlich untersuche, durch welche unmittelbaren Beobachtungsbefunde ein empirischer Satz eigentlich geprüft werden könne. Es hat den Anschein, als erfolge die Nachprüfung gerade der elementareren Sätze der Physik (etwa konkreter Temperatur- oder Stromstärke-Ablesungsangaben) nicht nach dem oben betrachteten logischen Verfahren, sondern als müßten solchen Sätzen definitorisch bestimmte Beobachtungsbefunde zugeordnet werden, die nun erst eine Kontrolle jener Sätze ermöglichten.

Indessen wird zwar mit dem Übergange zu Kontrollbedingungen, die die Gestalt von Beobachtungsaussagen haben, tatsächlich der Bereich der im engeren Sinne physikalischen Sätze verlassen, aber nicht der Bereich der wissenschaftlichen Sätze überhaupt, und der Übergang vom physikalsichen Satz („Hypothese") zum Beobachtungskontrollsatz vollzieht sich in denselben Formen wie der oben betrachtete Übergang von einer Hypothese zu solchen Kontrollfolgen, die noch physikalische Sätze im engeren Sinne sind. Die generellen und singulären Sätze, die jetzt zu der Hypothese adjungiert werden, gehören freilich nicht mehr sämtlich dem Bereich der Physik im engeren Sinne an, sondern zum Teil auch dem der Biologie und Psychologie; das gilt z. B. dann, wenn aus einer konkreten Längenangabe Kontrollfolgen abgeleitet werden, die die Befunde eines bestimmten Beobachters angeben.

7. Nun werde der oben in Erwägung gezogene Gedanke, jede Wahrscheinlichkeitsaussage als eine Hypothese von der Art einer Längenangabe einzuführen, wieder aufgenommen. Aus den vorstehenden Überlegungen ergibt sich, daß im Rahmen jenes Ansatzes der „physikalische Gehalt" einer Wahrscheinlichkeitsaussage nicht durch die Angabe einer statistischen Prüfungsvorschrift (Regel zur Ableitung finitstatistischer Kontrollfolgesätze) erschöpft wird, daß vielmehr jeder generelle Satz, der Wahrscheinlichkeitswerte mit anderen physikalischen Größen verknüpft, die Aufstellung weiterer Kontrollfolgesätze von keineswegs notwendig statistischem Charakter gestattet. Bevor wir Beispiele hierfür betrachten, werde die hier durchzuführende finitistische Deutung der Wahrscheinlichkeitsaussagen zusammenfassend formuliert. Dabei handelt es sich, wie nochmals betont sei, nicht eigentlich um die Aufstellung einer These, sondern um einen auf eine Untersuchung des Verfahrens der empirischen Wissenschaft gestützten Vorschlag zur syntaktischen Eingliederung der Wahrscheinlichkeitsaussagen in die Sprache der empirischen Wissenschaft, speziell der Physik. Dieser Vorschlag legt die

syntaktische Form der Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht in allen Einzelheiten, sondern nur in gewissen, allerdings wichtigen Zügen fest; vor allem erscheint der finite Charakter der hier auftretenden Begriffsbildungen als wesentlich.

Der Vorschlag besagt folgendes: Eine Wahrscheinlichkeitsaussage (in der Schreibweise von Reichenbach: $O \underset{p}{\rightarrow} P$) ist als eine physikalische Hypothese anzusehen, die sich nicht prinzipiell von den anderen Arten physikalischer Sätze unterscheidet. Eine Wahrscheinlichkeitsaussage macht keine Angaben statistischer oder sonstiger Art über unendliche Mengen empirischer Daten; wohl aber bestimmt sie eine beliebig erweiterbare Menge von Kontrollfolgen (cf. hierzu S. 56 o.). Eine wichtige Teilklasse der Kontrollfolgen einer Wahrscheinlichkeitsaussage sind die Kontrollfolgen statistischer Form. Sie sind als physikalische Sätze jedenfalls so zu formulieren, daß sie sich auf endliche Beobachtungsreihen beziehen und somit finit kontrollierbar sind. Die statistischen Kontrollfolgen einer Wahrscheinlichkeitsaussage besagen, daß die relative Häufigkeit des in Rede stehenden Ereignisses jeweils in ein gewisses Intervall um den angesetzten Wahrscheinlichkeitswert p fällt, dessen Breite mit wachsender Länge der statistischen Reihe abnimmt; sie besagen mit anderen Worten, daß für jede Zahl n von Würfen gilt:

$$(1) \qquad \left| p_P - \frac{n_P}{n} \right| < f(n);$$

dabei bezeichnet p_P die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsergebnisses P (unter bestimmten Versuchsbedingungen), n_P die Anzahl der „P-Fälle" bei n Beobachtungen unter den vorgeschriebenen Bedingungen, und f (x) eine monoton abnehmende Funktion von x, deren Werte zwischen 0 und 1 liegen, und die sich mit wachsendem x asymptotisch dem Wert 0 nähert.

Es soll hier nicht versucht werden, eine ganz bestimmte Funktion dieser Art festzulegen; denn das in den empirischen Wissenschaften geübte statistische Verfahren zur Nachprüfung von Wahrscheinlichkeitsaussagen ist nicht so scharf umrissen, daß man es mittels einer und nur einer solchen Funktion f (x) „rational nachkonstruieren" könnte. Nur darauf sei hingewiesen, daß im allgemeinen $f(x) > \frac{1}{x}$ für jedes x gelten wird; denn die Bedingung $\left| p - \frac{n_P}{n} \right| < \frac{1}{n}$ ist gleichbedeutend mit $n_P - p.n| < 1$; dies besagt aber, daß — unabhängig von der Gesamtzahl n — die Zahl der P-Fälle gleich n . p oder, falls dies keine ganze Zahl ist, gleich einer der beiden zu n . p „benachbarten" ganzen Zahlen

ist. Das ist eine sehr weitgehende Forderung, die praktisch kaum je als Maßstab für die Kontrolle empirischer Wahrscheinlichkeitsaussagen benutzt werden wird.

(Diese Formulierung (1) vermeidet die oben in Abschnitt 3 unter (α) erörterte Schwierigkeit. Der Einwand (β) wird aber ebenfalls hinfällig. Er besagte, daß man in der Physik mit der Wahrscheinlichkeitsaussage $O \underset{p}{\frown} P$ jedenfalls nicht die eben formulierten Kontrollfolgesätze mitbehaupten wolle, denn eine Wahrscheinlichkeitsaussage könne durchaus als wahr gelten, ohne daß die Sätze f_n für jeden kontrollierten Wert von n wahr wären. Es ist nun inzwischen dargelegt worden, daß dieser Einwand jedem physikalischen Satze gegenüber gelten würde, und daß er auf einer zu engen Auffassung von der logischen Funktion der Hypothesen und den Möglichkeiten ihrer empirischen Prüfung beruht; jene Auffassung ist daher bereits oben erweitert worden: jede Hypothese — und dies gilt für eine Wahrscheinlichkeitsaussage in demselben Sinne wie für eine konkrete Längenangabe — ist nur einer graduellen Bewährung fähig, und eine Hypothese gilt nicht schon als widerlegt, wenn sich einzelne ihrer Kontrollfolgen als nicht gültig erweisen. Von dieser Seite her scheinen mir daher der vorgeschlagenen finitistischen Deutung der statistischen Kontrollfolgen einer Wahrscheinlichkeitsaussage keine Schwierigkeiten zu erwachsen.)

Eine Wahrscheinlichkeitsaussage kann, diesem syntaktischen Vorschlag zufolge, ebensowenig endgültig bestätigt oder widerlegt werden wie jeder andere physikalische Satz: auch die Wahrscheinlichkeitsaussagen sind nur einer graduellen Bewährung fähig. Für die Beurteilung der Bewährung einer Wahrscheinlichkeitsaussage an einem statistischen Material ist in erster Linie die Abweichung der beobachteten relativen Häufigkeiten von den durch die Kontrollfolgen der Wahrscheinlichkeitsaussage bestimmten Wahrscheinlichkeitswerten entscheidend. Es lassen sich ohne prinzipielle Schwierigkeiten analytische Funktionen des Wahrscheinlichkeitsgrades p, der zu beobachtenden relativen Häufigkeiten und evtl. weiterer empirisch zu bestimmender Größen aufstellen, die ein numerisches Maß des Bewährungsgrades darstellen würden, den ein bestimmtes statistisches Beobachtungsmaterial einer Wahrscheinlichkeitsaussage erteilt. Indessen erscheint die Einführung einer solchen Funktion aus den oben allgemein dargelegten Gründen als eine zu starre Schematisierung; die Kriterien, nach denen in der wissenschaftlichen Forschung darüber entschieden wird, ob eine Wahrscheinlichkeitsaussage angesichts bestimmter statistischer Kontrollbefunde als bestätigt gilt oder nicht, lassen sich nicht erschöpfend durch eine solche Funktion festlegen, da hier „übergreifende Gesichtspunkte" eine wesentliche Rolle spielen; außerdem aber — und das ist im vorliegenden Zusammenhang besonders wichtig — erfolgt die Kontrolle von Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht ausschließlich an Hand von statistischem Material im engeren Sinne; und daher muß eine Beurteilung des Bewährungsgrades auch Kontrollsätze nicht-statistischer

Art in den Kreis der Untersuchung einbeziehen; daß hier aber nicht ohne Gewalt präzise Werte des Bewährungsgrades oder gar präzise Bedingungen für die Annahme oder Ablehnung einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsaussage angegeben werden können, ist einleuchtend.

8. Der eben dargelegte Vorschlag, die Wahrscheinlichkeitsaussagen konsequent finitistisch zu deuten und als gleichartig mit den sonstigen Sätzen der Physik zu behandeln, werde noch durch einige Beispiele erläutert, die dartun sollen, daß sich die Betrachtungen über die verschiedenen Typen von Kontrollfolgen einer Hypothese (Abschnitt 6) auch auf Hypothesen von der Form einer Wahrscheinlichkeitsaussage übertragen lassen:

a) Aus einer Wahrscheinlichkeitsaussage lassen sich zunächst solche Kontrollfolgen ableiten, die wieder die Form von Wahrscheinlichkeitsaussagen haben. Die allgemeinen Sätze aus S, die hierfür heranzuziehen sind, sind Gesetze der (physikalischen) Wahrscheinlichkeitsrechnung, also gewisse Naturgesetze. (Dieser Fall entspricht ungefähr der Ableitung von Längenangaben als Kontrollfolgen von Längenangaben.)

b) Aus einer Wahrscheinlichkeitsaussage lassen sich auch andersartige Kontrollfolgen ableiten; z. B. aus Angaben über die Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmter Quantenzustände eines Gases solche über die Intensitätsverhältnisse bestimmter Spektrallinien; zu der Ableitung werden physikalische Gesetze herangezogen, die die Wahrscheinlichkeit von Quantensprüngen zu der Intensität der betreffenden Linien in Beziehung setzen.

Es sei hier — unter Hinweis auf die Ausführungen in Abschnitt 2 — nochmals daran erinnert, daß die theoretische Physik in Fällen von dieser Art mit einem deutlich finitistischen Ansatz operiert (so in der Bohrschen Theorie, in der Theorie des radioaktiven Zerfalls und häufig auch in der kinetischen Gastheorie). Dieser hat im wesentlichen folgende Form: Ist N die Gesamtzahl der Atome eines Gases und w_Z die Wahrscheinlichkeit des Zustandes Z, so ist die Anzahl derjenigen Atome, die sich im Zustande Z befinden, $N_Z = N \cdot w_Z$. — Dies Verfahren, das in der Physik Anwendung findet, obwohl man „weiß", daß der Ansatz häufig nicht streng erfüllt ist, scheint mir durch den obigen syntaktischen Vorschlag einigermaßen erfaßt zu werden.

c) Eine besonders „unmittelbare" Kontrolle einer Wahrscheinlichkeitsaussage kann an Hand ihrer statistischen Kontrollfolgesätze vorgenommen werden; für diese wurde oben (Abschnitt 7) eine finite Formulierung vorgeschlagen.

d) Endlich werde noch auf eine Art der Begründung der Wahrscheinlichkeitsaussage hingewiesen, die logisch trivial ist, die aber doch ein besonderes methodisches Interesse besitzt. Es kann nämlich der Fall

eintreten, daß eine zu untersuchende Wahrscheinlichkeitsaussage bereits zu den Folgen des Systems S gehört; und unter den verschiedenen Fällen, die ein solches Vorkommnis ermöglichen, interessiert besonders der, daß in S allgemeine Sätze auftreten, die es gestatten, aus geeigneten Angaben nicht-statistischer Art über eine physikalische Konstellation die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ergebnisse eines bestimmten Prozesses anzugeben, der innerhalb jener Konstellation sich abspielt. Solche Gesetze kommen in der empirischen Wissenschaft tatsächlich vor; gelegentlich werden sie stillschweigend vorausgesetzt, ohne ausdrücklich genannt zu werden. Von dieser Art ist z. B. der Satz, daß ein „korrekt gebautes" Roulette (diese Eigenschaft denke man sich so festgelegt, daß die Korrektheit durch andere physikalische Methoden als durch die Untersuchung der Spielresultate geprüft wird) unter bestimmten Bedingungen für das Stoßverfahren zu einer Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeitswerte der einzelnen Ergebnisse führt. Von derselben Art, aber von ungleich höherem Interesse, sind allgemeine Sätze, die aussagen, daß für ein bestimmtes Gebiet physikalischer Erscheinungen die Wahrscheinlichkeitsrechnung eines bestimmten Typs, z. B. die Theorie der Bernoullischen Folgen, oder etwa die Fermische oder die Bose-Einsteinsche Statistik gilt. (Gesetze dieser Art stehen in Analogie zu solchen, die die Geltung der Euklidischen Geometrie in Raumgebieten mit hinreichend geringer Massendichte aussprechen; sie werden im folgenden Paragraphen nochmals zu betrachten sein.)

Ist eine Wahrscheinlichkeitsaussage (Beispiel: „Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses ‚rouge' beim Spiel mit diesem Mechanismus ist $\frac{18}{37}$") aus einem solchen allgemeinen Gesetz und gewissen empirischen Daten p (Beispiel: „Dieser Mechanismus ist ein korrekt gebautes Roulette") ableitbar, so bedarf sie an sich keiner Nachprüfung mehr; wird gleichwohl etwa eine statistische Prüfung vorgenommen, so können die damit neu in S eingehenden empirischen Kontrollsätze zur Prüfung und eventuellen Änderung des allgemeinen Gesetzes oder — und dies wird häufiger der Fall sein — der Daten p_x dienen.

Der Umstand, daß in der Physik Gesetze von der eben betrachteten Art auftreten, ist wohl auch einer der psychologischen Anlässe zur Aufstellung aprioristischer Theorien der Wahrscheinlichkeit geworden. Eine sachliche Rechtfertigung erfahren die aprioristischen Ansätze in diesem Zusammenhange freilich nicht, denn ihre grundlegende Voraussetzung besteht gerade in der Annahme, daß jene Gesetze von aprioriscli-logischem Charakter seien, während sie, wie im vorstehenden deutlich geworden sein dürfte, tatsächlich empirische Gesetze von derselben Art sind wie alle Naturgesetze.

Die vorstehenden Überlegungen zeigen, daß die hier vorgeschlagene syntaktische Eingliederung der Wahrscheinlichkeitsaussagen in die wissenschaftliche Sprache den Rahmen einer rein statistischen Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs insofern sprengt, als zur Nachprüfung einer Wahrscheinlichkeitsaussage nun auch nicht-statistische Methoden zugelassen sind; der empiristische Grundgedanke aber bleibt hierbei durchaus gewahrt; er wird sogar, wie mir scheint, noch konsequenter durchgeführt. Damit wird eine Auffassung vom logischen Charakter der Wahrscheinlichkeitsaussagen zum Ausdruck gebracht, mit der wohl die meisten Vertreter der statistischen Wahrscheinlichkeitstheorie einverstanden sein dürften. Zugleich entfällt, wie zuletzt gezeigt wurde, mit der vorgeschlagenen Eingliederung der Wahrscheinlichkeitsaussagen jener Einwand, der in verschiedener Form von den Vertretern einer aprioristischen Auffassung der Wahrscheinlichkeit gegenüber der statistischen Theorie erhoben wurde: daß diese Theorie den Zusammenhang nicht aufzuklären vermöge, der offenbar zwischen relativen Häufigkeiten der Ausgänge eines physikalischen Geschehens und der Konstellation, in der das Geschehen sich abspiele, besteht.

9. Es kann nun genauer angegeben werden, inwiefern *der oben dargelegte syntaktische Vorschlag eine „finitistische" Deutung der Wahrscheinlichkeitsaussagen* darstellt: die Finitisierung bezieht sich ausschließlich auf die Form einer bestimmten Klasse von Kontrollfolgesätzen einer Wahrscheinlichkeitsaussage, nämlich auf die der statistischen Kontrollfolgesätze; und tatsächlich war die wesentliche Problematik der empiristisch-statistischen Wahrscheinlichkeitstheorie gerade mit Kontrollfolgesätzen dieser Art verknüpft.

Es bedeutet keine Verletzung des finitistischen Grundgedankens, wenn oben ausdrücklich gesagt wurde, daß aus einer Wahrscheinlichkeitsaussage *beliebig viele* (finit-)statistische Kontrollfolgesätze ableitbar seien; denn hier liegt nicht, wie bei einer physikalisch gedeuteten Wahrscheinlichkeitsaussage, ein Satz der Physik, sondern ein Satz aus der Syntax der physikalischen Sprache vor, der allgemein besagt: Aus *jedem* nicht-analytischen Satze der Physik lassen sich in dem oben (S. 56) angegebenen Sinne beliebig viele Kontrollfolgesätze herleiten, sogar beliebig viele logisch unabhängige Kontrollfolgesätze. — Bei der empirischen Prüfung eines Satzes werden von jenen in beliebiger Zahl ableitbaren Kontrollfolgen stets nur endlich viele geprüft; während nun die Limesdeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs den Kontrollfolgen einen transfiniten Charakter verleiht, wird hier *eine finitistische Deutung für die einzelnen Kontrollfolgen* vorgeschlagen, und gerade eine solche scheint mir dem

empirisch-finiten Prüfungsverfahren Rechnung zu tragen, das die Wissenschaft, wie bei jeder anderen Hypothese, so auch bei der Prüfung einer Wahrscheinlichkeitsaussage anzuwenden pflegt.

Es ist im vorliegenden Kapitel stets nur von den Methoden der Nachprüfung einer Wahrscheinlichkeitsaussage die Rede gewesen, nicht aber davon, an Hand welcher Befunde (etwa statistischer Art) in der empirischen Wissenschaft eine Wahrscheinlichkeitsaussage aufgestellt wird. Hier ist indessen nur scheinbar eine wichtige Fragestellung vernachlässigt worden; die zweite Frage ordnet sich nämlich ihrem theoretischen Gehalt nach in das Problem der Nachprüfung einer Hypothese ein. Denn da jede Hypothese eine unendliche Menge logisch unabhängiger Kontrollfolgesätze besitzt, so bestimmt ein noch so umfangreiches empirisches Material — eine noch so große endliche Menge von Sätzen $g_1, g_2, \ldots, g_m$ – nicht eindeutig eine Hypothese, deren Kontrollfolgen die g_μ sind. Vielmehr ordnen die g_μ einer ansatzweise eingeführten Hypothese h einen bestimmten „Bewährungsgrad" — diese Betrachtungsweise vorbehaltlich aller oben genannten Einschränkungen genommen — zu, und man kann nun nach einer Hypothese suchen, die sich an den g_μ möglichst gut bewährt. Eindeutig ist aber dieser „Aufstieg von der Erfahrung zur Theorie" keineswegs, und die dabei auftretenden echt theoretischen Momente gehören offenbar dem Zusammenhang des Nachprüfungsproblems an, so daß in den vorangehenden Abschnitten auf eine gesonderte Behandlung der zweiten Frage verzichtet werden durfte.

§ 2. Über den Gehalt der Wahrscheinlichkeitsaussagen der empirischen Wissenschaft.

Die in den Paragraphen 2 und 3 des vorigen Kapitels angestellten Überlegungen führten zu dem Ergebnis, daß die physikalische Deutung der einzelnen Wahrscheinlichkeitsaussagen finit zu gestalten sei, da erst auf diese Weise die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Physik anwendbar werde und damit wirklich (im Sinne etwa von R. v. Mises) die mathematische Theorie einer physikalischen Disziplin darstelle. Die Finitisierung sollte insbesondere dazu dienen, den physikalischen Gehalt der Wahrscheinlichkeitsrechnung in die Sätze (speziell die Axiome) der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu legen und die Deutungsanweisung von der Voraussetzung der Geltung der Axiome unabhängig zu machen.

Diese zweite Forderung wird nun von der vorgeschlagenen finitistischen Deutung gewiß erfüllt: der Deutungsvorschlag besagt ja, soweit er überhaupt von statistischem Charakter ist, in grober Formulierung folgendes: Eine Wahrscheinlichkeitsaussage bezieht sich auf die relative Häufigkeit eines Ereignisses in Versuchsreihen von beliebiger endlicher Länge. — Hier wird also keine Konvergenzvoraussetzung gemacht, und es wird auch nicht vorausgesetzt, daß die Axiome einer Wahrscheinlichkeitsrechnung in dem betreffenden statistischen Bereich erfüllt seien. Es steht daher zu erwarten, daß die Sätze der physikali-

schen Wahrscheinlichkeitsrechnung in der finitistischen Fassung nicht mehr sämtlich analytisch sind, wie im Falle der transfiniten Deutung. Diese zweite Frage soll nun noch genauer untersucht werden.

Betrachten wir die in § 2 behandelten Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Reichenbach in [Axiomatik], § 3, aufstellt und die, wie früher dargelegt, in einem Teil der üblichen statistischen Theorie ein Modell besitzen! Es zeigt sich, daß dies Axiomensystem auch ein finitistisches arithmetisches Modell zuläßt, das man in Anlehnung an die Zuordnungsdefinition α folgendermaßen kennzeichnen kann:

Zuordnungsdefinition α': Man wähle ein beliebiges festes endliches n und ersetze $O \underset{p}{-} P$ durch die Formel $H_n(O, P) = p$. Entsprechend „deute" man die anderen Formeln, die in den Axiomen auftreten, und die sämtlich die Struktur der eben betrachteten aufweisen. (Die Bedeutung der hier auftretenden Zeichen ist im Zusammenhange mit der Zuordnungsdefinition α früher dargelegt worden.)

Man überzeugt sich unschwer davon, daß bei dieser Deutung sämtliche Axiome in analytische Formeln übergehen, genau so wie bei Zugrundelegung der transfiniten Zuordnungsdefinition α. Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß die betrachteten Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die aus ihnen folgenden Sätze sämtlich auch für jede endliche, abgeschlossen vorliegende Reihe physikalischer Beobachtungsdaten gelten, wenn die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsergebnisses durch seine relative Häufigkeit innerhalb der ganzen endlichen Serie definiert wird. Wäre dies freilich die gesamte Bedeutung des finitisierten Wahrscheinlichkeitsbegriffs, so wäre die physikalisch interpretierte Wahrscheinlichkeitsrechnung wiederum nur ein System analytischer Formeln und nicht eine Theorie mit physikalischem Gehalt. In der Tat: aus den Angaben etwa, daß in einer bestimmten endlichen Reihe von Würfen mit einem bestimmten Würfel 20% Fünfer- und 14% Sechserwürfe aufgetreten sind, ergibt sich rein analytisch — da die genannten Ergebnisklassen einander ausschließen —, daß die relative Häufigkeit derjenigen Würfe in derselben Reihe, die zu dem Ergebnis „Fünf oder Sechs" geführt haben, 34% beträgt. (Dies Beispiel macht deutlich, daß bei der hier zunächst betrachteten „engeren", nur auf abgeschlossen vorliegende endliche Versuchsreihen bezogenen finitistischen Deutung das Axiom III, 1 des Reichenbachschen Systems analytisch wird; ähnliche Betrachtungen lassen sich für jedes andere Axiom des Systems durchführen.)

In Wahrheit aber macht die Physik einen weitergehenden Gebrauch von den Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung: sie wendet sie nämlich auch auf solche Datenreihen an, die innerhalb gewisser endlicher Grenzen beliebig erweiterbar sind und nicht schon mit allen ihren

Elementen abgeschlossen vorliegen. Die Sätze, die sich auf diese Weise ergeben, wären analytisch, wenn die relative Häufigkeit aller in Betracht gezogenen Ereignisse bei jeder Verlängerung der statistischen Reihe konstant blieben; dies ist nun freilich — schon aus Gründen der Arithmetik — nicht immer streng möglich; aber die Überlegung zeigt immerhin, daß die angenäherte Gültigkeit der finit-physikalisch interpretierten Formeln jedenfalls für solche empirischen Folgen gewährleistet ist, in denen die relative Häufigkeit der untersuchten Ergebnisse annähernd konstant ist; und in dieser Bedingung ist nun der physikalische Gehalt desjenigen Teils der Wahrscheinlichkeitsrechnung angegeben, den Reichenbach mit den obigen Axiomen präzisiert hat. (Dieser Teil der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde oben als die „allgemeine formale Wahrscheinlichkeitsrechnung" bezeichnet; durch die physikalische Deutung gehe er in die „allgemeine physikalische Wahrscheinlichkeitsrechnung" über.)

Auch das „Gesetz der großen Zahlen", dessen übliche transfinite Formulierung in Kapitel II als leer erwiesen wurde (das Ergebnis der S. 28 angestellten Überlegungen läßt sich ja so formulieren: In seiner üblichen Formulierung hat das Gesetz der großen Zahlen keine einzige Kontrollfolge; sein Gehalt ist also die leere Menge), scheint im Grunde auf die Bedingung der näherungsweisen Konstanz der relativen Häufigkeiten abzuzielen; die hier angegebene Bedingung der Geltung der allgemeinen physikalischen Wahrscheinlichkeitsrechnung scheint also auch den physikalischen Kern des Gesetzes der großen Zahlen zu bilden.

Daß die wissenschaftliche Forschung die Frage der Geltung des Gesetzes der großen Zahlen in einem bestimmten physikalischen Bereich tatsächlich zum Gegenstand einer finit-empirischen Prüfung macht, werde an einem Beispiel kurz erläutert:

An einer Eisenschiene möge eine Reihe von Längenmessungen vorgenommen werden; das Kontinuum der möglichen Längenwerte werde in kleine Intervalle von gleicher Länge eingeteilt, und als „Ergebnis" einer Messung werde nur das Intervall notiert, in das das Messungsergebnis fällt. Bei gleichbleibender Länge des Stabes treten die verschiedenen Ergebnisse mit ungefähr konstanter relativer Häufigkeit auf; ändert aber der Stab während der Dauer der Messungen seine Länge, so ist das nicht der Fall. In der Physik wird nun zwischen den beiden Fällen konstanter und variabler Länge, die hier als der Fall der Geltung bzw. der Nichtgeltung des Gesetzes der großen Zahlen im Bereich der Messungsergebnisse zu unterscheiden wären, durchaus auch empirisch unterschieden, obwohl stets nur endlich viele Messungen durchgeführt werden können. Das „Gesetz der großen Zahlen" wird also deutlich in dem angedeuteten finitistischen Sinne gefaßt.

Man kann hiernach sagen: In jedem Bereich von physikalischen Häufigkeitserscheinungen, für den das im angegebenen Sinne finitistisch gefaßte Gesetz der großen Zahlen gilt, gelten auch die Sätze der allgemeinen physikalischen Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Der von uns gewählte Zusatz „allgemeine“ Wahrscheinlichkeitsrechnung sollte das bisher betrachtete System der Wahrscheinlichkeitsrechnung von gewissen spezielleren Formelsystemen unterscheiden, zu deren Aufstellung noch zusätzliche Axiome erforderlich werden. Es wurde bereits früher betont, daß sich aus den bisher betrachteten Axiomen nicht alle Sätze etwa der v. Misesschen Wahrscheinlichkeitsrechnung herleiten lassen, sondern nur diejenigen, die aus der Voraussetzung der Konvergenz der relativen Häufigkeiten in den betrachteten Reihen (also aus dem Axiom I der Theorie von R. v. Mises) ableitbar sind; um auch noch diejenigen Sätze zu erhalten, die v. Mises unter Hinzunahme der Regellosigkeitsforderung (Axiom II seines Systems) beweist — und hierzu gehören wichtige Sätze der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung —, bedarf es einer geeigneten Erweiterung der allgemeinen Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Reichenbach a. a. O. näher untersucht.

Das Regellosigkeitsaxiom dient insbesondere dazu, aus der Menge aller Folgen mit konvergenten relativen Häufigkeiten die Klasse der „normalen Folgen“ auszusondern, die man nach Reichenbach im Anschluß an einen auch sonst in der Wahrscheinlichkeitsrechnung üblichen Gedanken durch die Eigenschaft kennzeichnen kann, daß für die Aufeinanderfolge ihrer Glieder das spezielle Multiplikationstheorem gilt. Dies lautet in Reichenbachs Schreibweise:

$$[(O \underset{p}{\rightarrow} P).(O \underset{q}{\rightarrow} Q)] \supset [(O \underset{w}{\rightarrow} P \,.\, Q).(w = p \,.\, q)] \,.$$

Reichenbach gibt ([Axiomatik], S. 599) eine axiomatische Charakterisierung der Struktur dieser Folge; das so spezialisierte Axiomensystem wird nun durch das in der Zuordnungsdefinition α charakterisierte transfinite Modell nicht mehr befriedigt, und ebensowenig ist das oben durch Zuordnungsdefinition α' gekennzeichnete finite arithmetische Modell der allgemeinen formalen Wahrscheinlichkeitsrechnung noch ein Modell dieser spezielleren Theorie. Der Gehalt der letzteren ist größer als derjenige der allgemeinen Theorie, und es wird daher physikalische Gebiete geben, in denen die allgemeine, aber nicht die spezielle physikalische Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt. (Beispiel: Man denke sich ein bestimmtes Stück des Himmels in Abständen von fünf Minuten photographiert und jedesmal die Bewölkungsdichte durch eine der Ziffern 0 bis 9 bezeichnet. Denkt man sich dies Verfahren während einer längeren Zeit durchgeführt, so entsteht eine Reihe von Ziffern, für deren relative Häufigkeiten ungefähr die Sätze der allgemeinen physikalischen Wahrscheinlichkeitsrechnung gelten werden; dagegen besitzt die Reihe gewiß nicht die Struktur der normalen Fol-

gen, da z. B. die Sequenz 0;9 wesentlich seltener sein wird als die Sequenzen 0;1 oder 5;3.) In ähnlicher Weise lassen sich noch weitere besondere Axiomensysteme der formalen Wahrscheinlichkeitsrechnung in Spezialisierung der allgemeinen formalen Wahrscheinlichkeitsrechnung aufstellen (vgl. Reichenbach a. a. O.); es gibt also verschiedene formale Wahrscheinlichkeitsrechnungen, so wie es verschiedene formale Geometrien gibt. Durch die physikalische Deutung, für die hier ein finitistisches Verfahren vorgeschlagen wurde, geht das System der Sätze einer bestimmten formalen Wahrscheinlichkeitsrechnung in ein System physikalischer Hypothesen über, und es ist Aufgabe der Physik, zu entscheiden, welche wahrscheinlichkeitstheoretische Struktur ein bestimmtes System physikalischer Daten besitzt. Diejenigen physikalischen Gesetze, die die wahrscheinlichkeitstheoretische Struktur eines empirischen Bereiches angeben, sind jenen analog, die die geometrische Struktur eines bestimmten Raumgebietes festlegen.

Die vorstehenden Untersuchungen über die logische Syntax der Wahrscheinlichkeitsaussagen scheinen mir im Grunde nur eine konsequente Auseinanderlegung des Grundgedankens jeder empiristischen Theorie der Wahrscheinlichkeit darzustellen. v. Mises hat diesen Grundgedanken besonders anschaulich formuliert, indem er die Wahrscheinlichkeitsrechnung als die mathematische Theorie einer naturwissenschaftlichen Disziplin bezeichnete und sie in Parallele setzte zur reinen Geometrie oder zur analytischen Mechanik, und Reichenbach hat ihn nachdrücklich vertreten, indem er — besonders in seinen Auseinandersetzungen mit den aprioristischen Theorien der Wahrscheinlichkeit — immer wieder auf den empirischen Gehalt der Wahrscheinlichkeitsaussagen und der Wahrscheinlichkeitsgesetze hinwies. Die obigen Überlegungen stellen einen Versuch dar, die Folgen aufzuweisen, die sich aus einer solchen Auffassung für die logische Form der wissenschaftlichen Sprache ergeben, und insbesondere eine Sprachstruktur zu umreißen, die die konsequente Durchführung des Grundgedankens der empiristischen Theorie der Wahrscheinlchkeit möglich macht.

Literaturverzeichnis.

Becker, O. [Modalitätslogik]. Zur Logik der Modalitäten. Jahrb. f. Philosophie und phänomenologische Forschung 11, 496—548.

Bernoulli, Jac. [Ars conjectandi] Ars conjectandi. Basileae 1713.

— [Wahrscheinlichkeitsrechnung]. Ars conjectandi; Basel 1713 = Wahrscheinlichkeitsrechnung, übersetzt und herausgegeben von R. Haußner. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 107 und 108.

Bolzano, B. [Wissenschaftslehre]. Wissenschaftslehre (hg. v. W. Schultz; Meiner, Leipzig).

Broad, C. D. [Induction]. On the Relation between Induction and Probability. I: Mind 27, 389 (1918), II: Mind 29, 11 (1920).

Carnap, R. [Aufbau]. Der logische Aufbau der Welt. 1928. F. Meiner. Leipzig.

— [Scheinprobleme]. Scheinprobleme in der Philosophie. Das Fremdpsychische und der Realismusstreit. 1928. F. Meiner, Leipzig.

— [Logistik]. Abriß der Logistik. Schriften zur wiss. Weltauffassung, Bd. 2. Wien, Springer, 1929.

— [Logik]. Die alte und die neue Logik. Erkenntnis 1, 12.

— [Metaphysik]. Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache. Erkenntnis 2, 219.

— [Sprache]. Die physikalische Sprache als Universalsprache der Wissenschaft. Erkenntnis 2, 431.

— [Protokollsätze]. Über Protokollsätze. Erkenntnis 3, 215.

Czuber, E. [Grundlagen]. Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig 1923.

— [Lehrbuch]. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2 Bde. 4. A. Leipzig und Berlin, 1924 bzw. 1928.

Dörge, K. [Begründung]. Zu der von R. v. Mises gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erste Mitteilung: Theorie des Glücksspiels. Math. ZS 32 (1930).

Dubislav, W. [Naturphilos.]. Naturphilosophie. Philosophische Grundrisse, Bd. 2, Berlin, Junker und Dünnhaupt, 1933.

Eisler, R. [Philos. Begr.]. Wörterbuch der philosophischen Begriffe, 4. A, weitergeführt und vollendet durch Dr. Karl Roretz. Mittler, Bln. 1930.

Exner, F. [Grundlagen]. Vorlesungen über die physikalischen Grundlagen der Naturwissenschaften. Leipzig u. Wien, F. Deuticke. 2. A. 1922.

Feigl, H. [Wahrscheinlichkeit]. Wahrscheinlichkeit und Erfahrung. Erkenntnis 1, 249.

— [Induction]. The Logical Character of the Principle of Induction. Philosophy of Science, I, 20 (1934).

Hilbert, D. und Ackermann, W. [Logik]. Grundzüge der theoretischen Logik. Springer, Berlin 1928.

Hohenemser, K. [Grundl.]. Beitrag zu den Grundlagenproblemen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erkenntnis 2, 354.

v. Juhos, B. [Wahrscheinlichkeit]. Das Problem der mathematischen Wahrscheinlichkeit. München 1930.

Kaila, E. [Ausgleich des Zufalls]. Der Satz vom Ausgleich des Zufalls und das Kausalprinzip. Erkenntnislogische Studien. Annales Universitatis Fennicae Aboensis; Series B, Tom II, No. 2, Turku 1924.

Kaila, E. [Wahrscheinlichkeitslogik]. Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitslogik. Annales Univ. Fennicae Aboensis; Series B, Tom IV, No. 1, Turku 1926.
— [Neupositivismus]. Der logistische Neupositivismus. Eine kritische Studie. Annales Univ. Aboensis; Series B, Tom XIII, Turku 1930.
Kamke, E. [Wahrscheinlichkeitstheorie]. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. Leipzig 1932.
— [Begründungen]. Über neuere Begründungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. XLII, 14.
Kaufmann, F. [Das Unendliche]. Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung. Deuticke, Leipzig und Wien 1930.
Keynes, J. M. [Probability]. A. Treatise on Probabilitiy. London, Macmillan, 1921.
— [Wahrscheinlichkeit]. Über Wahrscheinlichkeit. Aus dem Englischen übersetzt von F. M. Urban. Leipzig, Barth, 1926.
v. Kries, J. [Prinzipien]. Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Freiburg i. B. 1886.
— [Anwendung]. Über Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Physik. Naturwissenschaften 7 (1919).
Lewis-Langford [Logik]. Symbolic Logic. New York 1932. Appendix II über Strict implication.
Marbe, K. [Gleichförmigkeit]. Die Gleichförmigkeit in der Welt. Untersuchungen zur Philosophie und positiven Wissenschaft. München. Beck, 1916. Desgl. Zweiter Band. München, Beck, 1919.
v. Mises, R. [Fundamentalsätze]. Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. ZS 4 (1919).
— [Grundlagen]. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. ZS 5, 52 (1919).
— [Gleichförmigkeit]. Marbes Gleichförmigkeit in der Welt und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Naturwissenschaften 7 (1919).
— [Gesetz d. großen Zahlen]. Über das Gesetz der großen Zahlen und die Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit. Naturwissenschaften 15 (1927).
— [Wahrscheinlichkeit]. Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Wien 1928. (Schriften zur wiss. Weltauffassung Bd. 3.)
— [Gesetzmäßigkeit]. Über kausale und statistische Gesetzmäßigkeit in der Physik. Erkenntnis 1, 189. (Abdruck aus Naturwissenschaften 18, 145 (1930).)
— [Wahrscheinlichkeitsrechnung]. Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik. I. Bd.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoret. Physik. Leipzig u. Wien, Fr. Deuticke, 1931.
Nelson, E. J. [Intens. relat.]. Intensional relations. Mind 39, 440—453 (1930).
Neurath, Otto [Soziologie]. Empirische Soziologie. Der wissenschaftliche Gehalt der Geschichte und Nationalökonomie z. wiss. Weltauffassung. Bd. 5, Springer, Wien 1931.
— [Protokollsätze]. Protokollsätze. Erkenntnis 3, 204, 1932.
Planck, M. [Phys. Erk.]. Wege zur physikalischen Erkenntnis. Reden und Vorträge. Leipzig, Hirzel, 1933.
Poincaré, H. [Wiss. u. Hypothese]. Wissenschaft und Hypothese. Deutsch von F. und L. Lindemann, Leipzig, Teubner. 2. A. 1906.
[Calcul]. Calcul des probabilités. Paris, Gauthièr-Villars.

Ramsey, F. P. [Foundations]. The Foundations of Mathematics and other Logical Essays. London 1931.

Reichenbach, H. [Begriff]. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit für die math. Darstellung der Wirklichkeit. Diss. Erlangen 1915, Barth, Leipzig 1916 u. ZS für Philosophie u. philos. Kritik, Bd. 161, 1917.

— [Voraussetzungen]. Die physikalischen Voraussetzungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Naturwissenschaften 8, 46 (1920).

— [Kritik]. Philosophische Kritik der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Naturwissenschaften 8, 146 (1920).

— [Relativitätstheorie]. Relativitätstheorie und Erkenntnis apriori. Berlin, Springer, 1920.

— [Relat. Ax.]. Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre. Braunschweig 1924.

— [Kausalstruktur]. Die Kausalstruktur der Welt und der Unterschied von Vergangenheit und Zukunft. Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. Math.-Naturwiss. Abt., 1925, S. 133—175.

— [Raum-Zeit-Lehre]. Philosophie der Raum-Zeit-Lehre. de Gruyter, 1928.

— [Physik]. Ziele und Wege der physikalischen Erkenntnis. In: Hdb. d. Physik, hg. v. Geiger u. Scheel, Bd. 4, S. 1—80, Berlin, Springer, 1929.

— [Kausalproblem]. Das Kausalproblem in der Physik. Naturwissenschaften 19, 713 (1931).

— [Kausalität]. Kausalität und Wahrscheinlichkeit. Erkenntnis 1, 158.

— [Axiomatik]. Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. ZS 34, 568, 1932.

— [Wahrscheinlichkeitslogik]. Wahrscheinlichkeitslogik. Sitzungsberichte der Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Klasse, 1932, XXIX.

— [Kausalbehauptung]. Die Kausalbehauptung und die Möglichkeit ihrer empirischen Nachprüfung. Erkenntnis 3, 32.

— [Log. Grundl.]. Die logischen Grundlagen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Erkenntnis 3, 401.

Russell, B. und Whitehead, A. N. [Prinzipia]. Prinzipia Mathematica. Cambridge, University Press. 2nd edition 1925/27.

Schlick, M. [Naturphilosophie]. In: Lehrbuch der Philosophie, hg. v. Dessoir; Bd. 2, S. 393—492. Berlin, Ullstein, 1925.

— [Erkenntnislehre]. Allgemeine Erkenntnislehre. Berlin, Springer, 2. A. 1925.

— [Wende]. Die Wende der Philosophie. Erkenntnis 1, 4.

— [Kausalität]. Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik. Naturwissenschaften 19, 145 (1931).

Stumpf, C. [Begriff]. Über den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Akad. d. Wiss. zu München; philos.-philolog. Classe; Jahrg. 1892, S. 37 ff.

— [Anwendung]. Über die Anwendung des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs auf Teile eines Continuums. Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Akad. d. Wiss. zu München; philos.-philolog. Classe; 1892, S. 681 ff.

Tornier, E. [Grundlegung]. Eine neue Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. ZS f. Physik 63, 697 (1930).

— [Axiome]. Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Grelles Journal 1930.

Venn, John [Chance]. The logic of chance. London u. Cambridge 1866.

— [Ind. Logic]. The principles of empirical or inductive logic. London 1889.

Waismann, F. [Analyse]. Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Erkenntnis 1, 228.

Weber-Wellstein [Enzyklopädie]. Enzyklopädie der Elementarmathematik. III. Bd. Zweiter Teil, 3. A. Teubner, Leipzig u. Berlin 1924. Zweites Buch: Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Von H. Weber und J. Bauschinger.)

Weyl, H. [Philosophie]. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. In: Hdb. d. Philosophie, Hg. v. Baeumler u. Schröter. Abt. II A, München u. Berlin 1926.

Windelband, W. [Zufall]. Die Lehren vom Zufall. Berlin 1870.

Wittgenstein, L. [Tractatus]. Tractatus Logico-Philosophicus. London 1922.

Zilsel, E. [Anwendungsproblem]. Das Anwendungsproblem. Ein philosophischer Versuch über d. Gesetz d. gr. Zahlen und d. Induktion. Barth, Leipzig 1916.

v. Mises, R., Neurath, O., Zilsel, E. u. a. [Diskussion]. Diskussion über Wahrscheinlichkeit auf der 1. Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften in Prag 1929. Erkenntnis 1, 260.

Lebenslauf.

Ich, Carl Gustav Hempel, wurde am 8. Januar 1905 in Eden bei Oranienburg als Sohn des Garteninspektors Carl Hempel und seiner Frau Charlotte geb. Keßler geboren. Ich besitze die reichsdeutsche Staatsangehörigkeit und bin evangelischer Konfession. Meine Schulbildung erhielt ich von Ostern 1911 bis Dezember 1912 in der Dorfschule zu Herzberg (Mark), von Januar 1913 ab im Realgymnasium zu Berlin-Pankow, das ich bis zur Ablegung der Reifeprüfung — Ostern 1923 — besuchte.

In den folgenden Jahren studierte ich Philosophie, Mathematik, Physik und Chemie an den Universitäten Göttingen (SS. 1923 und WS. 1923/24), Heidelberg (SS. 1924), Berlin (WS. 1924/25 bis SS. 1928) und Wien (WS. 1929/30). Meine akademischen Lehrer waren in Göttingen die Herren Professoren Misch; Behmann, Courant, Hilbert, Landau, Runge; Pohl; in Heidelberg die Herren Professoren v. Bubnoff; Liebmann, Rosenthal; Kopff, Lenard; in Berlin die Herren Professoren Dubislav, Köhler, Liebert, Maier, Reichenbach, Spranger; Bieberbach, v. Mises, Schmidt, Schur; Planck, Pringsheim, Schlenck, Wehnelt. — In Wien studierte ich ausschließlich Philosophie; besonders bei den Herren Professoren Carnap und Schlick.

Im November 1929 bestand ich in Berlin die Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen in den Fächern Mathematik, Physik und philosophischer Propädeutik; von Ostern 1931 ab unterzog ich mich der praktischen Ausbildung für das Lehramt an höheren Schulen, die ich im Februar 1933 mit dem Assessor-Examen abschloß.